数学演習 VII・VIII　追加レポート解説[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

問題 1. (4) で全射性の議論を省略している答案が目立ちました. 次のように議論して下さい.

任意の $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ に対し $A := \begin{pmatrix} b & a \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ととれば $F([A]) = (\det A, \operatorname{tr} A) = (a,b)$ となるので, F は全射.

問題 2. (2) は正答が少なかったので解説します. "$G = \langle f^2, f, g, fg, gf, fgf, gfg \rangle$ となるので $|G| = 7$" といった誤答が目立ちましたが, 2 か所誤りがあります. まず $fgf = gfg$ なので $|G| = 6$ です. あと $\langle a, b, \ldots, c \rangle$ と $\{a, b, \ldots, c\}$ は意味が違います. 前者は "$a, b, \ldots, c$ の生成する群" という意味で, 後者は "$a, b, \ldots, c$ からなる集合" という意味です. 例えば 3 次の巡回群と同型な群 $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ について, $G = \langle \overline{1} \rangle = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ です (但し $\overline{n} := n \bmod 3$).

(2) の解答を書いておきます: (1) の計算から $f^2 = g^2 = \mathrm{id}$ となるから $G = \langle f, g \rangle$ の任意の元は $fgfg\cdots$ または $gfgf\cdots$ のような f と g の交互の積で書ける. 再び (1) の計算から id, f, g, fg, gf, $fgf = gfg$ の 6 つは互いに異なる. また $fgfg = fg$, $gfgf = gf$ が確認できるので, この 6 つ以外に G の元は存在しない. 以上より $G = \{\mathrm{id}, f, g, fg, gf, fgf\}$ となり, G は有限群で $|G| = 6$.

問題 3. 出来が悪かったので解答を書きます.

(1) $r \in \mathbb{R}$ に対し $E_r := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq r\}$ とする. $\mathbb{R}$ の Lebesgue 測度を μ と書くと, 仮定から各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\mu\big((E_{-1/n})^c\big) = 0$. $E_0 = \cap_{n>0} E_{-1/n}$ なので, Lebesgue 測度の劣加法性から $\mu({E_0}^c) = \mu\big((\cap_{n>0} E_{-1/n})^c\big) = \mu\big(\cup_{n>0} (E_{-1/n})^c\big) \leq \sum_{n>0} \mu((E_{-1/n})^c) = 0$. よって $f(x) \geq 0$ a.e..

(2) 区間 $[-n, n] \subset \mathbb{R}$ の特性関数を χ_n と書くと, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $\lim_{n\to\infty} \chi_n(x) f(x) = f(x)$. また $|\chi_n(x) f(x)| \leq |f(x)|$ で, 仮定から $|f(x)|$ は $\mathbb{R}$ 上可積分. よって $|f(x)|$ を優関数とする優収束定理が適用できて, $\lim_n \int_{\mathbb{R}} \chi_n f dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_n \chi_n f dx = \int_{\mathbb{R}} f dx$. これから結論をえる.

問題 4. (1) で "$(x,y) = (t, \pm\sqrt{t^3 - t^2})$, $t \geq -1$" と y の符号によって 2 つの部分に分けている答案が目立ちましたが, これだと $(x,y) = (-1,0)$ で微分不可能 (片側微分は可能) なので, パラメータ表示としては少し不正確です. 次の解答のようにすれば分けずに済みます.

(1) $(x(t), y(t)) = \big(t^2 - 1, t(t^2 - 1)\big)$, $t \in \mathbb{R}$ で C はパラメータ表示される.

(2) $\kappa(t) = (x'y'' - x''y')/\big((x')^2 + (y')^2\big)^{3/2} = 2(3t^2 + 1)/(9t^4 - 2t^2 + 1)^{3/2}$ となるので, $t^2 = u$ として $f(u) := (3u+1)/(9u^2 - 2u + 1)^{3/2}$ の $u \geq 0$ での最大値を求めればよい. $f'(u) = -6(9u^2 + 4u - 1)/(9u^2 - 2u + 1)^{5/2}$ より最大値を与える u は $u_0 = (\sqrt{13} - 2)/9$. よって求める点は $(x,y) = \big(u_0 - 1, \pm\sqrt{u_0}(u_0 - 1)\big) = \big((\sqrt{13} - 11)/9, \pm(\sqrt{13} - 2)^{1/2}(\sqrt{13} - 11)/27\big)$.

以上です.

[*1] 2018/06/20 版, ver. 0.2.