数学演習 VII・VIII 追加レポート問題[*1]

易しめのレポート問題を用意しました．大問 1 つを 5 点とします．次回 **6 月 14 日**[*2]の演習の時間を提出の締切とします．

問題 1. 複素数成分の 2 次正方行列全体の集合 M に, 二項関係 $\sim$ を次のように定める．

$$A \sim B \iff A = PBP^{-1} \text{ を満たす正則行列 } P \in M \text{ が存在する．}$$

(1) $\sim$ が同値関係であることを示せ．
以下, 商集合 $M/\sim$ における $A \in M$ の同値類を $[A] \in M/\sim$ と書く．
(2) 写像 $f : (M/\sim) \to \mathbb{C}$ を $f([A]) := \det A$ で定める．f が well-defined であることを示せ．
(3) 写像 $g : (M/\sim) \to \mathbb{C}$ を $g([A]) := \operatorname{tr} A$ で定める．g が well-defined であることを示せ．
(4) 写像 $F : (M/\sim) \to \mathbb{C}^2$ を $F([A]) := (\det A, \operatorname{tr} A)$ で定める．F は全射ではあるが単射ではないことを示せ．

問題 2. $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ から自分自身への写像

$$f(z) := 1 - z, \quad g(z) := 1/z$$

を考える．写像の合成 $f \circ f$ や $f \circ g$ を f^2 や fg のように表す．
(1) $f^2(z)$, $g^2(z)$, $fg(z)$, $gf(z)$, $fgf(z)$, $gfg(z)$ を z の関数として求めよ．
(2) f, f^{-1}, g, g^{-1} を任意に有限回合成して得られる写像全体のなす集合は, 写像の合成に関して群 G になる．G が有限群であることを示し, その位数を求めよ．

問題 3. (1) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は任意の $\varepsilon > 0$ に対して $f(x) \geq -\varepsilon$ a.e. を満たすものとする．この時 $f(x) \geq 0$ a.e. であることを示せ．
(2) $\mathbb{R}$ 上の可積分関数 f に対し, 次の等式が成立することを示せ．

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

問題 4. 次の平面曲線 C を考える．

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^2(x + 1)\}.$$

(1) C をパラメータ表示せよ．
(2) C の曲率の絶対値が最大になる点を求めよ．

以上です．

[*1] 2018/05/31 版, ver. 0.2.
[*2] ver. 0.2 で訂正しました．