数学演習 VII・VIII　5 月 31 日分問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

7　群論 2 (準同型定理)

各問題の冒頭にある $*$ の数は, その問題の難易度の目安を表しています.

7.1　部分群と商集合

群 G の空でない部分集合 H が積と逆元を取る操作で閉じているとき, H を G の部分群といった. G それ自身や単位元 e_G のみからなる集合 $\{e_G\}$ は明らかに G の部分群である.

問題 7.1 ($*$)**.** H と K を群 G の部分群とする.

(1) $H = H^{-1} = HH$ を示せ. 但し H^{-1} と HH は以下で定まる G の部分集合である.

$$H^{-1} := \{h^{-1} \mid h \in H\}, \quad HH := \{h_1 \cdot h_2 \mid h_1, h_2 \in H\}.$$

(2) $H \cap K$ も G の部分群になることを示せ.

問題 7.2 ($*$)**.** H と K を群 G の部分群とする. G の部分集合 HK と KH を以下のように定める.

$$HK := \{h \cdot k \mid h \in H,\ k \in K\}, \quad KH := \{k \cdot h \mid h \in H,\ k \in K\}.$$

このとき, HK が G の部分群となるための必要十分条件は $HK = KH$ となることを示せ.

問題 7.3 ($*$)**.** 整数全体のなす加法群 $(\mathbb{Z}, +, 0)$ の任意の部分群は, 非負整数 n を用いて $n\mathbb{Z} = \{nm \mid m \in \mathbb{Z}\}$ と表されることを示せ

定義 7.1. G を群, H を G の部分群とする. $x \in G$ に対し, G の部分集合 xH を次式で定義する.

$$xH := \{x \cdot h \mid h \in H\}$$

但し $\cdot$ は群 G の積である. このとき, $x, y \in G$ について

$$x \sim y \overset{\text{dfn}}{\iff} xH = yH$$

で定まる二項関係 $\sim$ は同値関係になる. この $\sim$ による商集合 $G/\sim$ を G/H と書く.

問題 7.4 ($*$ **Lagrange の定理**)**.** 定義 7.1 と同じ記号を用いる.

(1) G が有限群のとき, 商集合 G/H の濃度を $[G : H]$ と書くと, 次の式が成り立つことを示せ.

$$|G| = [G : H] \cdot |H|.$$

(2) 有限群 G の任意の元 $g \in G$ について, g の位数 $\mathrm{ord}(g)$ は G の位数 $|G|$ の約数であることを示せ.

定義. 群 G の部分群 H について, 商集合 G/H の濃度 $[G : H]$ を H の**指数** (index) と呼ぶ.

[*1] 2018/04/21 版, ver. 0.1.

7.2 正規部分群

定義. G を群とし, $N \subset G$ の部分群とする. 任意の $g \in G$ に対して $gN = Ng$ が成り立つとき, N は G の**正規部分群** (normal subgroup) であるといい, $N \triangleleft G$ と書く.

例 7.2. 可換群の任意の部分群は正規部分群である.

問題 7.5 ($*$)**.** 3 次の対称群 S_3 の正規部分群を全て求めよ.

問題 7.6 ($**$)**.** H を群 G の指数 2 の部分群とする. このとき H は G の正規部分群となることを示せ.

定義. 自明でない正規部分群を持たない群を**単純群**と呼ぶ.

問題 7.7 ($*$)**.** 巡回群のうち単純群であるものを全て決定せよ.

非可換な単純群の例を挙げるために交代群を導入する. その準備として

定義 7.3. n 次対称群 S_n の元, つまり置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ について, その**転倒数** $N(\sigma)$ を

$$N(\sigma) := |\{(i,j) \mid 1 \le i < j \le n,\, \sigma(i) > \sigma(j)\}|$$

で定め, σ の**符号** (signature) $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を次のように定める.

$$\mathrm{sgn}(\sigma) := (-1)^{N(\sigma)}.$$

置換の符号は行列式の定義 (のうちの 1 つ) に現れる. すなわち, n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ の行列式は次のように書ける.

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

問題 7.8 ($*$)**.** n 次対称群 S_n の部分集合

$$A_n := \{\sigma \in S_n \mid \mathrm{sgn}(\sigma) = 1\}$$

が指数 2 の部分群であることを示せ. (必要なら問題 7.13, 7.14 の結果を使って良い.)

定義. 問題 7.8 の群 A_n を n 次**交代群**と呼ぶ.

問題 7.9 ($*$)**.** 4 次の交代群 A_4 は次の正規部分群を持つことを示せ. 但し e は恒等置換.

$$V := \left\{ e, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

問題 7.10 ($*$)**.** 5 次の交代群 A_5 は単純群であることを示せ.

注意. 問題 7.9 で扱った A_4 の正規部分群の存在は, 4 次の代数方程式が可解である (解の公式が存在する) ことと関係する. また問題 7.10 の A_5 の単純性は, 5 次の代数方程式が可解でない (解の公式が存在しない) ことと関係する. このように, 代数方程式の可解性が群論で理解できる, というのが **Galois 理論**の主旨である.

非可換な単純群については, 次の事実が知られている. (証明はそれほど難しくない. 位数 60 以下の有限群を分類すれば良いのだから.)

定理. 非可換な単純群のうち最小位数のものは A_5 と同型.

7.3　商群

問題 7.11 (*)**.** G を群とし, N を G の正規部分群とする．商集合 G/N に写像 $\cdot : G/N \times G/N \to G/N$ を

$$g_1N \cdot g_2N \;:=\; (g_1g_2)N$$

で定める．$\cdot$ は well-defined で, G/N は $\cdot$ を演算とする群になることを証明せよ．

定義. 問題 7.11 の群 G/N を, 群 G の正規部分群 N による**商群**とよぶ．

例. $\mathbb{Z}$ は加法に関して可換群であるため, 例 7.2 より $n\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の正規部分群である．従って $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は群をなす．その元は $\overline{k} = k \bmod n$ と書けて, 演算を $m : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と書くと,

$$m(\overline{k}, \overline{l}) \;=\; \overline{k+l}$$

で与えられる．従って商群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は以前扱った位数 n の巡回群と一致する．

例 7.4. 可換群 $(\mathbb{R}, +, 0)$ の部分群 $\mathbb{Z}$ は正規部分群なので, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は自然な群構造を持つ．

7.4　準同型写像

定義. G, H を群とし, $f : G \to H$ を写像とする．

(1) 任意の $x, y \in G$ に対して次が成り立つとき, f は群の**準同型写像**であるという．

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

(2) 全単射な準同型写像 $f : G \to H$ を**同型写像**とよぶ．また, このとき G と H は**同型**であるという．

同型写像を準同型写像と区別したいときは $f : G \xrightarrow{\sim} H$ と書く．また同型写像を具体的に与えずに, 単に G と H が同型であることだけを述べたいときは $G \simeq H$ と書く．

問題 7.12 (*)**.** G と H を群とし, $f : G \to H$ を群の準同型写像とする．また e_G と e_H をそれぞれ G と H の単位元とする．このとき $f(e_G) = e_H$ となることを示せ．また, 任意の $g \in G$ に対して $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ となることを示せ．

問題 7.13 (*)**.** 定義 7.3 で定めた置換の符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ は, 写像

$$\mathrm{sgn} : S_n \longrightarrow \{\pm 1\}, \quad \sigma \longmapsto \mathrm{sgn}(\sigma)$$

を定める．この写像が群の準同型であることを示せ．

定義. G と H を群とし, $f : G \to H$ を群の準同型写像とする．また e_H を H の単位元とする．f の**核** (kernel) $\mathrm{Ker}\, f$ と**像** (image) $\mathrm{Im}\, f$ を次で定める．

$$\mathrm{Ker}\, f \;:=\; f^{-1}(e_H), \quad \mathrm{Im}\, f \;:=\; \{f(g) \in H \mid g \in G\}.$$

問題 7.14 (∗)**.** $f : G \to H$ を群の準同型写像とする．また e_G と e_H をそれぞれ G と H の単位元とする．

(1) $\operatorname{Ker} f$ は G の正規部分群になることを示せ．

(2) $\operatorname{Ker} f = \{e_G\}$ ならば f は単射であることを示せ．

(3) $\operatorname{Im} f$ は H の部分群になることを示せ．

定理 (**準同型定理**)**.** $f : G \to H$ を群の準同型写像とする．写像 $\overline{f} : G/\operatorname{Ker} f \to H$ を $\overline{f}(g \operatorname{Ker} f) := f(g)$ で定めると, これは well-defined であり, また群の準同型になる．更に $\overline{f}$ は以下のような群の同型写像を与える．

$$\overline{f} : G/\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} f, \quad g \operatorname{Ker} f \longmapsto f(g).$$

問題 7.15 (∗)**.** 例 7.4 の群 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と, 複素数の乗法で定まる群 $T := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ が同型なことを示せ．

7.5 群の中心

定義. 次で定める群 G の部分集合 $Z(G)$ を G の**中心**とよぶ．

$$Z(G) := \{z \in G \mid gz = zg \ \forall g \in G\}.$$

問題 7.16 (∗)**.** G を群とする．

(1) G の中心 $Z(G)$ は G の正規部分群であることを示せ．

(2) $G/Z(G)$ が巡回群ならば $G = Z(G)$ であることを示せ．

問題 7.17 (∗)**.** 実数成分の n 次正則行列のなす集合 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ は行列の乗法に関して群をなす． この群 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の中心 $Z(G)$ を求めよ．

問題 7.18 (∗)**.** n 次対称群 S_n の中心 $Z(S_n)$ を求めよ．

問題 7.19 (∗∗)**.** G を群とする．

(1) G からそれ自身への同型写像 $G \xrightarrow{\sim} G$ 全体は写像の合成を積として群になることを示せ．この群を G の**自己同型群**とよび, $\operatorname{Aut} G$ と書く．

(2) 群 G の中心 $Z(G)$ が自明, すなわち $Z(G) = \{e\}$ ならば, G の自己同型群 $\operatorname{Aut} G$ の中心 $Z(\operatorname{Aut} G)$ も自明であることを示せ．

7.6 レポート問題

レポートの締め切りは (今学期末までという自明なものを除いて) 特に設けません．

レポート問題 7.1 (∗)**.** 位数 $2n$ の二面体群 D_{2n} の部分群を全て求めよ．また正規部分群を全て求めよ．

レポート問題 7.2 (∗∗ **有限体上の一般線形群**)**.** (1) $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ は, 素数 p と正整数 l で $q = p^l$ と書けるものとする．このとき, 位数 q の (可換) 体が同型を除いて一意に存在することを示せ．この体を $\mathbb{F}_q$ と書く．

(2) 体 $\mathbb{F}_q$ の元を成分とする n 次正則行列の集合 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ は, 行列の乗法を積とする群である．この群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の位数を求めよ．

以上です．