数学演習 VII・VIII　5 月 24 日分小テスト解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

問題. $a, b \in \mathbb{R}$ は $a > b > 0$ を満たすものとする. 次のパラメータ表示 γ を持つ平面曲線 C を考える.

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cosh at \\ \sinh bt \end{pmatrix}.$$

但し $\cosh x$, $\sinh x$ は次のように定義される関数である.

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

(1) C の概形を描け.

(2) 点 $\gamma(t) \in C$ における曲率 $\kappa(t)$ を求めよ. また $\kappa(t)$ の最大値とそれを与える C 上の点を求めよ.

解答. $\cosh x, \sinh x$ は**双曲線関数** (hyperbolic function) と呼ばれる. 以下の性質に注意する.

$$(\cosh x)' = \sinh x, \quad (\sinh x)' = \cosh x, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$
$$\cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y = \cosh(x - y), \quad \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \sinh(x + y).$$

(1) $x > 0$ の部分にあり, $(1, 0)$ を通り, 漸近形が $(2x)^b = (2y)^a$ となる曲線.

(2) $\gamma(t) = {}^T\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ とおくと

$$x' = a \sinh at, \quad y' = b \cosh bt, \quad x'' = a^2 \cosh at, \quad y'' = b^2 \sinh bt.$$

よって曲率は

$$\kappa = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{ab^2(\sinh at \sinh bt - \cosh at \cosh bt)}{(a^2 \sinh^2 at + b^2 \cosh^2 bt)^{3/2}}$$
$$= \frac{-ab^2 \cosh(a - b)}{\bigl(b^2 + (a^2 \sinh^2 at + b^2 \sinh^2 bt)\bigr)^{3/2}}.$$

$\sinh^2 u \geq 0$, $\cosh u > 0$ より κ の最大値はなし. (最小値は $-ab^2/(b^2)^{3/2} = -a/b$ で, それを与える点は $t = 0$ の点, つまり $\gamma(0) = (1, 0)$.)

コメント. $2 + 3$ 点で採点しました. 平均点は 2.2 点でした. (2) で弧長パラメータの時の曲率の公式を使っている方が何人かいましたが, この問題の t は $|\gamma'(t)| \neq 1$ なので弧長パラメータではありません.

実は出題ミスをしていて, 本来は $\gamma(t) = (a \cosh t, -b \sinh t)$ のつもりでした. この場合は C は双曲線 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ の $x > 0$ の部分です. また曲率の最大値は $\gamma(0) = (a, 0)$ での $\kappa = a/b^2$ です.

以上です.

[*1] 2018/05/24 版, ver. 0.1.