数学演習 VII・VIII　5 月 24 日分問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

6　常微分方程式 1（初等的解法）

今回は断らない限り実数変数の実数値関数及びその微分方程式だけを考えます.
各問題の冒頭にある $*$ の数は, その問題の難易度の目安を表しています.

6.1　1 階常微分方程式の初等的解法

1 階常微分方程式のうち, 主に正規形のものについて, 初等的な解法を復習する. 以下のリストや解法は [吉田 78, 第 1 編 A 第 2 章] に従っている.

独立変数 x と未知関数 $y = y(x)$ についての常微分方程式を考える. 正規形の 1 階常微分方程式とは, 2 変数関数 $f(z, w)$ を用いて次の形で与えられている常微分方程式のことである.

$$y' = f(x, y)$$

正規形常微分方程式のリスト

- 変数分離型　$y' = f(x)g(y)$.
  - 同次形　$y' = f(y/x)$.
  - 同次線形　$y' = p(x)y$.
  - 非同次線形　$y' = p(x)y + q(x)$.
    - Bernoulli 型　$y' = p(x)y + q(x)y^n$.
    - Riccati 型　$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$.
- 完全微分　$p(x, y) + q(x, y)y' = 0$, 但し $\partial_y p(x, y) = \partial_x q(x, y)$.
  - 積分因数 + 完全微分　$p(x, y) + q(x, y)y' = 0$.

解法

- 変数分離型. $\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx + C$ と積分できる.
  - 同次形. $y/x = u$ とおいて変数分離型に帰着.
  - 同次線形. 変形分離型の解法が適用できて, 一般解は $y = C \exp\Big(\int p(x)\, dx\Big)$.
  - 非同次線形. $q(x) = 0$ の場合は同次線形なので解ける. 得られた一般解 $y = C \exp(\int p(x) dx)$ の積分定数 C を x の関数 $z(x)$ に置き換えて

$$y = z(x) \exp\Big(\int p(x)\, dx\Big)$$

[*1] 2018/06/14 版, ver. 0.3.

とする. これを元の方程式に代入して得られる z の微分方程式は

$$z' = q(x)\exp\Bigl(-\int p(x)\,dx\Bigr)$$

という変数分離型になって, z を決定することができる.

* Bernoulli 型. $z := y^{1-n}$ とおくと

$$z' = (n-1)p(x)z + (n-1)q(x)$$

となって非同次線形の場合に帰着する.

* Riccati 型. 一般解は求積不可能. ひとつの解 y_1 が分かったとすると, $y = z + y_1$ として Bernoulli 型に帰着.

- 完全微分. $p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$ と書き直して両辺を線積分すると

$$\int p(x,y)dx + \int q(x,y)dy = C$$

となり, x と y の関係式が得られる.

  – 積分因数 + 完全微分. 上手く関数 $\lambda(x,y)$ を見つけて $\partial_y(\lambda p) = \partial_y(\lambda q)$ が成り立つようにできれば, 完全微分の場合に帰着できる.

問題

以下の問題 6.1–6.14 では, 未知関数 $y = y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ.

問題 6.1 (∗). $y' - y\sin x = 0$.

問題 6.2 (∗). $xy'' + 2y' - xy = 0$.

問題 6.3 (∗). $xy' = y - \sqrt{xy}$.

問題 6.4 (∗). $y' = y + e^x$.

問題 6.5 (∗). $(1+x^2)y' + 2xy = 1$.

問題 6.6 (∗). $y' + xy + xy^3 = 0$.

問題 6.7 (∗). $y' = y(1-y)$.

問題 6.8 (∗). $(3x^2y - y^3) + (x^3 - 3xy^2)y' = 0$.

問題 6.9 (∗). $yy' - xy' + y = 0$.

問題 6.10 (∗). $y' + x^2y = x^2$.

問題 6.11 (∗). $y' - y = xy^2$.

問題 6.12 (∗). $(x^2+1)y' - xy = x(x^2+1)$.

問題 6.13 (∗). $e^y y' - x - x^3 = 0$.

問題 6.14 (∗)**.** $y'' - 7y' + 10y = 5x^2 + 3x + 4.$

問題 6.15 (∗)**.** 複素変数 $z = x + iy$ の正則関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ の実部[*2]が $u = x^2 - y^2 + x$ で与えられたとする. このときの虚部 v を求め, f を z の関数として書け.

6.2 レポート問題

レポート問題 6.1 (∗ **Gauss の超幾何微分方程式と超幾何関数**)**.** $a, b, c \in \mathbb{R}$ とする. 次の 2 階の微分方程式を **Gauss の超幾何微分方程式**とよぶ.

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (c - (a+b+1)x)\frac{dy}{dx} - aby = 0 \tag{6.1}$$

$a, b, c \notin \{-1, -2, -3, \ldots\}$ ならば, 次の級数で与えられる関数 $F(a, b; c; x)$ が (6.1) の解であることが知られている.

$$F(a, b; c; x) \,:=\, \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n(b)_n}{(1)_n(c)_n} x^n \,=\, 1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2c(c+1)}x^2 + \cdots.$$

但し, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $(z)_n$ は次で与えられる.

$$(z)_0 := 1, \quad (z)_1 := z, \quad (z)_n := z(z+1)\cdots(z+n-1).$$

関数 $F(a, b; c; x)$ を **Gauss の超幾何関数**とよぶ. この問題では, $F(a, b; c; x)$ が (6.1) の級数解であることを確かめていく.

(1) $F(a, b; c; x)$ の k 次係数を

$$f_k \,:=\, \frac{(a)_k(b)_k}{(1)_k(c)_k}$$

と置く. また

$$p(x) \,:=\, (x+1)(x+c), \quad q(x) \,:=\, (x+a)(x+b)$$

とする. この時, 次式が成立することを示せ.

$$f_{k+1} \cdot p(k) - f_k \cdot q(k) \,=\, 0.$$

(2) $\vartheta_x := x\frac{d}{dx}$ を **Euler 微分**とよぶ. 任意の 1 変数多項式 $s(z)$ に対し, $s(\vartheta_x)$ を形式的に変数 z を ϑ_x に置き換えてできる微分作用素とする. この時, 次の等式が成立することを示せ.

$$s(\vartheta_x)(x^k) \,=\, x^k s(k).$$

(3) [*3] 次の等式を示せ.

$$p(\vartheta_x - 1)(F(a, b; c; x)) \,=\, \sum_{k \geq 0} x^{k+1} f_{k+1} p(k), \quad q(\vartheta_x)(F(a, b; c; x)) \,=\, \sum_{k \geq 0} x^k f_k q(k).$$

(4) 微分作用素 L を

$$L \,:=\, p(\vartheta_x - 1) - xq(\vartheta_x)$$

と定める. 次式が成立することを示せ.

$$L(F(a, b; c; x)) \,=\, 0.$$

[*2] ver. 0.2 で修正しました.

[*3] ver. 0.3 で修正しました.

(5) 次の等式を示せ

$$x^{-1}L \;=\; x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)\frac{d}{dx} - \alpha\beta.$$

以上の議論, 特に問 (4) と (5) から, $F(a,b;c;x)$ が (6.1) の級数解であることが分かった.

レポート問題 6.2 (∗ **狭義の Riccati 微分方程式**). この問題は [吉田 78, 第 I 編 A 第 2 章 §9] に基づく.

狭義の Riccati 微分方程式

$$y' + ay^2 \;=\; bx^\alpha \qquad (a,\, b,\, \alpha \text{ は定数}) \tag{6.2}$$

を考える. 但し $a, b, \alpha \neq 0$ としておく. (そうでない場合は変数分離形なので求積可能).

(1) $\alpha = -2$ の場合の一般解を, $z = 1/y$ と変数変換することで求めよ.

(2) $y = z/x^2 + 1/(ax)$ と変数変換し, 更に $\eta = z^{-1}$, $\xi = x^{\alpha+3}$ と変換することで, 方程式 (6.2) が

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{b}{\alpha+3}\eta^2 \;=\; \frac{a}{\alpha+3}\xi^{-(\alpha+4)/(\alpha+3)}$$

に帰着することを確かめよ. 特に $\alpha = -4n/(2n-1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ の場合, この変数変換で

$$-\frac{\alpha+4}{\alpha+3} \;=\; \frac{-4(n-1)}{2(n-1)-1}$$

となることから, 同様の変換を計 n 回繰り返して方程式 (6.2) を変数分離形

$$y' + cy^2 \;=\; e$$

の形に帰着させることができる. よって元の方程式 (6.2) の求積ができる.

(3) $\alpha = -4n/(2n+1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ の場合も (2) と同様の方法で求積が可能であることを説明せよ.

(4) $y' = ay^2 + bx^{-4}$ の一般解を求めよ.

レポート問題 6.3 (∗∗∗∗ **Riccati 微分方程式の非可積分性**). 代数関数, 指数関数, 対数関数, 三角関数, 逆三角関数, 及びをこれらの関数の有限回の合成で得られる関数を**初等関数**と呼ぶ. 狭義の Riccati 微分方程式

$$y' + ay^2 \;=\; bx^\alpha$$

のうち, 一般解が初等関数で書けるものは問題 6.2 で扱った α のみに限ることが, Liouville の論文

J. Liouville, *Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1^{re} série, tome **6** (1841), 1–13

で証明されている. この定理の証明を解説せよ.

レポートの締め切りは (今学期末までという自明なものを除いて) 特に設けません.

また, レポートを書くときに本や論文を参照することは全く問題ありませんが, **必ずその本を引用し**, 特に**引用箇所を明示**して下さい. 具体的にはレポート問題 6.2, 6.3 のように説明して下されば十分です.

参考文献

[吉田 78] 吉田耕作, **微分方程式の解法** 第 2 版, 岩波全書, 1978 年.

以上です.