数学演習 VII・VIII 5 月 17 日分小テスト解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

問題. (1) $\mathbb{R}$ の Lebesgue 測度の定義を述べよ.

(2) μ を $\mathbb{R}$ の Lebesgue 測度とする. (1) で述べた定義に基づいて, $\mu(\mathbb{Q})$ と $\mu(\mathbb{R})$ を求めよ.

解答. (1) $\mathbb{R}$ の部分集合 A に対して, $\mu(A)$ を

$$\mu(A) := \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \,\Big|\, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\Big\}$$

と定義する. 但し $I_k \subset \mathbb{R}$ は $I_k = [a_k, b_k)$ の形の半開区間で, $|I_k| := b_k - a_k$ としている. すると μ は $\mathbb{R}$ の外測度であり,

$$\mathscr{M} := \{A \subset \mathbb{R} \mid \mu(E) = \mu(A \cap E) + \mu(A^c \cap E),\ \forall E \subset \mathbb{R}\}$$

とすれば $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, \mu)$ は測度空間である. この μ を $\mathbb{R}$ の Lebesgue 測度と呼ぶ.

(2) 答えは $\mu(\mathbb{Q}) = 0$ と $\mu(\mathbb{R}) = \infty$.
まず $\mu(\mathbb{Q})$ について. 任意の 1 点集合 $\{c\} \subset \mathbb{R}$ に対し $\mu(\{c\}) = 0$. $\mathbb{Q}$ は可算集合なので $\mathbb{Q} = \sqcup_{i=1}^{\infty}\{c_i\}$ と書ける. すると完全加法性から $\mu(\mathbb{Q}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\{c_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0$.
次に $\mu(\mathbb{R})$ について. 各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $I_n := [0, n)$ とすると, $I_n \subset \mathbb{R}$ かつ $\mu(I_n) = |I_n| = n$. 劣加法性から $\mu(\mathbb{R}) \geq \mu(I_n) = n$. n は任意なので $\mu(\mathbb{R}) = \infty$.

コメント. $3 + 2$ 点で採点しました. 平均点は 2.6 点でした. 全体的に出来が良くなかったのですが, この問題は完答できるようにして下さい. (1) の解答で大切なのは, 測度関数 μ の定義, 可測集合の定義, 測度空間の定義です. 測度関数だけ書いても不十分です. (2) で大切な所は, 完全加法性や劣加法性を使うこと, 1 点集合や区間の測度の値, $\mathbb{Q}$ が可算集合であることですが, これらを**明記する**ようにして下さい.

Lebesgue 測度の定義はここに書いた Carathéodory 流の他に, Lebesgue が与えた元来の構成や, Borel 測度を拡張する方法があります. Borel 測度については, この問題を解く際にはあまり気になりませんが, $\mathbb{R}$ 上の Borel 可測集合の族と Lebesgue 可測集合の族の違いを思い出しておいてください.

1 点集合 $\{c\} \subset \mathbb{R}$ の Lebesgue 測度が 0 であることの証明を復習しておきます: 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\{c\} \subset [c - \varepsilon/2, c + \varepsilon/2)$ なので $\mu(\{c\}) \leq \big|[c - \varepsilon/2, c + \varepsilon/2)\big| = \varepsilon$. ε は任意に取っていたから $\mu(\{c\}) = 0$.

区間 $I = [a, b)$ の Lebesgue 測度が $b - a$ であることの証明も書けるよう, 復習しておいて下さい (5 月 10 日分の問題 4.7, 4.8).

以上です.

[*1] 2018/05/23 版, ver. 0.2.