

## 数学演習 VII・VIII 5月17日分解答\*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida>

## 5 曲線と曲面の幾何 1 (曲率)

 ${}^T X$  で行列ないしベクトル  $X$  の転置を表すことにする.

## 5.1 平面曲線のパラメータ表示

問題 5.1.  $C$  は半径  $R$  の円.

(1)  $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix}, \gamma''(t) = \begin{pmatrix} -R \cos t \\ -R \sin t \end{pmatrix}.$

(2)  $L(C) = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$

(3)  $\tilde{\gamma}'(s) = \begin{pmatrix} -\sin(s/R) \\ \cos(s/R) \end{pmatrix}$  より任意の  $s$  に対し  $|\tilde{\gamma}'(s)| = 1$  なので,  $\tilde{\gamma}$  は  $C$  の弧長パラメータ表示.

問題 5.2.  $s = \int_0^t |\gamma'(u)| du$  より  $\frac{ds}{dt} = |\gamma'(t)|$ . 従って

$$\tilde{\gamma}'(s) = \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} = \frac{d\tilde{\gamma}}{dt} \frac{dt}{ds} = \gamma'(t) \frac{1}{|\gamma'(t)|}$$

となり,  $|\tilde{\gamma}'(s)| = 1$  が分かる.問題 5.3.  $\gamma(s) = {}^T(x(s), y(s))$  とすると仮定から  $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$ . 両辺を  $s$  で微分して

$$x'(s)x''(s) + y'(s)y''(s) = 0.$$

一方で  $\gamma'(s) = {}^T(x'(s), y'(s))$  と  $\gamma''(s) = {}^T(x''(s), y''(s))$  より

$$\gamma'(s) \cdot \gamma''(s) = x'(s)x''(s) + y'(s)y''(s).$$

従って  $\gamma'(s) \cdot \gamma''(s) = 0$  となり,  $\gamma'(s) \perp \gamma''(s) = 0$  が分かる.

## 5.2 平面曲線の曲率

問題 5.4.  $C$  の弧長パラメータ表示  $\tilde{\gamma}(s) = {}^T(R \cos(s/R), R \sin(s/R))$  から

$$\tilde{\gamma}'(s) = \begin{pmatrix} -\sin(s/R) \\ \cos(s/R) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}''(s) = \begin{pmatrix} -R^{-1} \cos(s/R) \\ -R^{-1} \sin(s/R) \end{pmatrix}$$

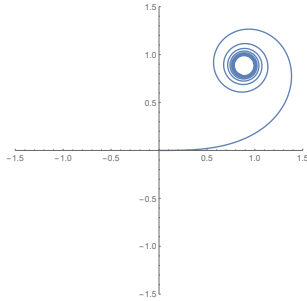
を得る. また  $n(s) = {}^T(-\cos(s/R), \sin(s/R))$  となる. よって  $\tilde{\gamma}''(s) = R^{-1}n(s)$ . つまり  $\kappa(s) = R^{-1}$ .

\*1 2018/05/14 版, ver. 0.1.

問題 5.5. (1)  $\gamma'(s) = T(\cos s^2/2, \sin s^2/2)$  より  $|\gamma'(s)| = 1$ .

(2)  $\gamma''(s) = T(-s \sin s^2/2, s \cos s^2/2)$  と  $n(s) = T(-\sin s^2/2, \cos s^2/2)$  より  $\kappa(s) = s$ .

(3) 下図のようになる.



問題 5.6. (1)  $\gamma''(s) = T(-\theta''(s) \sin \theta(s), \theta'(s) \cos \theta(s))$ ,  $n(s) = T(-\sin \theta(s), \cos \theta(s))$ .

(2) (1) より  $\gamma''(s) = \theta'(s)n(s)$  なので  $\theta'(s) = \kappa(s)$ . これから  $\int_a^b \kappa(s) ds = \int_a^b \theta'(s) ds = \theta(b) - \theta(a)$ .

問題 5.7. 簡単のため弧長パラメータ  $s$  を省略して  $\gamma = \gamma(s)$  などと書くことにする.

$\gamma'' = \kappa n$  から  $e'_1 = \kappa e_2$ . よって  $e'_2 = -\kappa e_1$  を示せば十分.

$\gamma = T(x, y)$  とおくと,  $e_1 = \gamma' = T(x', y')$  および  $e_2 = n(s) = T(-y', x')$  から  $e'_1 = T(x'', y'')$  と  $e'_2 = T(-y'', x'')$  を得る. 既に表示してある  $e'_1 = \kappa e_2$  から  $x'' = \kappa y'$  と  $y'' = -\kappa x'$  が成立するので,  $e_2 = -\kappa e_1$  が従う.

問題 5.8. (1)  $\gamma(t) = (t, at + bt)$  として命題 5.2 を用いて計算すると, 曲率は常に 0.

(2)  $\gamma(t) = (t, at^2 + bt + c)$  として命題 5.2 を用いて曲率を計算すると,  $\kappa(t) = 2a/(1 + (2at + b)^2)^{3/2}$ .

$a > 0$  なら最大値は  $t = -b/2a$ , つまり  $(x, y) = (-b/2a, c - b^2/4a)$  での  $2a$ , 最小値はなし.

$a = 0$  なら常に 0.

$a < 0$  なら最小値は  $(x, y) = (-b/2a, c - b^2/4a)$  での  $2a$ , 最大値はなし.

(3)  $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$  として命題 5.2 を用いて曲率を計算すると,  $\kappa(t) = ab/(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}$ .

$a > b$  の場合, 最大値は  $t = 0, \pi$ , つまり  $(x, y) = (\pm a, 0)$  での  $a/b^2$ . 最小値は  $t = \pi/2, 3\pi/2$ , つまり  $(x, y) = (0, \pm b)$  での  $b/a^2$ ,

$a = b$  の場合, 曲率は常に  $1/a$ .

(4)  $\gamma_+(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$ ,  $\gamma_-(t) = (-a \cosh t, b \sinh t)$  として命題 5.2 を用いて曲率を計算すると,  $\kappa_{\pm}(t) = \mp ab/(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{3/2}$ .

最大値は  $(x, y) = \gamma_-(0) = (-a, 0)$  での  $a/b$ , 最小値は  $(x, y) = \gamma_+(0) = (a, 0)$  での  $-a/b$ .

問題 5.9.  $\gamma'(t) = T(1, \sinh t)$  より  $|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t$  となる.

よって曲線の長さは  $\int_{-1}^1 \cosh t dt = [\sinh t]_{-1}^1 = e - e^{-1}$ .

また曲率は  $\gamma''(t) = T(0, \cosh t)$  から  $\kappa(t) = \cosh t / \cosh^3 t = 1 / \cosh^2 t$ .

問題 5.10.  $\gamma'(t) = T(1 - \cos t, \sin t)$  から  $|\gamma'(t)| = \sqrt{2(1 - \cos t)} = 2 \sin t/2$  となる.

従って曲線の長さは  $\int_0^{2\pi} 2 \sin t/2 dt = 8$ .

また曲率は  $\gamma''(t) = T(\sin t, \cos t)$  から  $\kappa(t) = (\cos t - 1)/(2 \sin t/2)^3 = -1/(4 \sin t/2)$ .

**問題 5.11.** 問題 5.2 のように、与えられたパラメータ表示  $\gamma(t)$  から弧長パラメータ表示  $\tilde{\gamma}(s)$  が得られる。このとき  $\tilde{\gamma}'(s) = \gamma'(t)/|\gamma'(t)|$  および

$$\tilde{\gamma}''(s) = \frac{d}{ds} \left( \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \right) = \frac{\gamma''(t)}{|\gamma'(t)|^2} + \gamma'(t) \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{|\gamma'(t)|} \right)$$

が成立する。よって点  $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(s)$  における曲率は、 $\det(\gamma'(t), \gamma''(t)) = 0$  に注意して、

$$\kappa(t) = \tilde{\kappa}(s) = \det(\tilde{\gamma}'(s), \tilde{\gamma}''(s)) = \frac{1}{|\gamma'(t)|^3} \det(\gamma'(t), \gamma''(t)).$$

これで示すべき式の最右辺が得られた。中辺は  $\gamma(t) = {}^T(x(t), y(t))$  を使って最右辺から導ける。

### 5.3 空間曲線の曲率

**問題 5.12.** パラメータ  $t$  を省略して  $A = A(t)$ ,  $e = e(t)$  などと書くことにする。

- (1)  $|e| = 1$  より  $e \cdot e = 1$ . これを微分して  $e' \cdot e = 0$ , つまり  $n \cdot e = 0$  となるので、 $e$  と  $n$  は直交する。  
 $b = e \times n$  なので、 $b$  は  $e$  および  $n$  と直交する。また  $|e| = 1$  と  $|n| = 1$  から  $|b| = 1$ . よって  ${}^TAA = I_3$ ,  
 つまり  $A$  は直交行列。特に  $A$  は逆行列  $A^{-1}$  を持つ。すると  $B = A^{-1} \cdot \frac{d}{dt}A$  となって  $B$  は well-defined.  
 (2) 直交行列なので  $A^{-1} = {}^TA$ . よって  ${}^TAA = A^{-1}A = I_3$ . この式を  $t$  で微分して、

$$A^{-1} \frac{d}{dt}A + {}^T \left( \frac{d}{dt}A \right) A = 0.$$

(1) の議論より  $B = A^{-1} \cdot \frac{d}{dt}A$  なので  ${}^TB = {}^T \left( \frac{d}{dt}A \right) {}^T(A^{-1}) = {}^T \left( \frac{d}{dt}A \right) A$ . 以上より  $B + {}^TB = 0$ .

- (3) 方程式  $\frac{d}{dt}A = AB$  から  $(e', n', b') = (e, n, b)B$ , 特に  $e' = eB_{11} + nB_{21} + bB_{31}$ .  $e'$  と  $n$  は平行であり、  
 また  $e, b \perp n$  なので  $B_{11} = B_{31} = 0$ . (2) より  $B$  は歪対称なので  $B_{13} = B_{31} = 0$ .

**問題 5.13.** 簡単のためパラメータ  $t$  を省略して  $\gamma = \gamma(t)$  などと書く。

$\gamma' = {}^T(-a \sin t, a \cos t, b)$  より  $e = {}^T(-a \sin t, a \cos t, b)/\sqrt{a^2 + b^2}$ .

すると  $e' = {}^T(-\cos t, -\sin t, 0) \cdot a/\sqrt{a^2 + b^2}$  となるから  $n = e'/|e'| = {}^T(-\cos t, -\sin t, 0)$ .

よって曲率は

$$\kappa = (a/\sqrt{a^2 + b^2})/\sqrt{a^2 + b^2} = a/(a^2 + b^2).$$

また  $b = e \times n = {}^T(b \sin t, -b \cos t, a)/\sqrt{a^2 + b^2}$  および  $b' = {}^T(b \cos t, b \sin t, 0)/\sqrt{a^2 + b^2}$ . よって振率は  $b' = -\tau n$  から

$$\tau = b/(a^2 + b^2).$$

**問題 5.14.**  $e = \gamma'$ ,  $n = \gamma''/|\gamma''|$  と Frenet-Serret 公式より  $\kappa = |\gamma''|$ . すると  $b = e \times n = \gamma' \times \gamma''/|\gamma''|$  から

$$b' = \gamma' \times \gamma'''/|\gamma''| - (\gamma' \times \gamma'')\gamma'''/|\gamma''|^2.$$

一方で Frenet-Serret 公式より

$$b' = -\tau n = -\tau \gamma''/|\gamma''|.$$

よって内積  $(b', \gamma'')$  を 2 通りに計算すると

$$(\gamma' \times \gamma''', \gamma'')/|\gamma''| = -\tau |\gamma''|.$$

左辺は  $-\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')/|\gamma''|$  なので、 $\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') = \tau |\gamma''|^2 = \tau \kappa^2$  を得る。

問題 5.15. (1) 直接計算で

$$\frac{dA}{dt} = AB, \quad B_{21} = -B_{12} = a/c = \kappa, \quad B_{32} = -B_{23} = b/c = \tau$$

となる.

(2)  $\kappa(t) = B_{21}/|\gamma'(t)|$  から  $|\gamma'(t)| = \kappa^2$ .  $A$  の第 1 列が  $e(t) = \gamma'(t)/|\gamma'(t)|$  であることから

$$\gamma'(t) = {}^T(-a\kappa^2 \sin(t/c), a\kappa^2 \cos(t/c), b\kappa^2)$$

となり, これから

$$\gamma(t) = {}^T(a\kappa^2 \cos(t/c), a\kappa^2 \sin(t/c), b\kappa^2 t) + v \quad (v \in \mathbb{R}^3 \text{ は積分定数})$$

となる. これは問題 5.13 でも扱った螺旋である.

### 連絡事項

今日のオフィスアワーは 16 時 45 分頃までとします.

以上です.