数学演習 VII・VIII　5 月 17 日分問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

5　曲線と曲面の幾何 1 (曲率)

各問題の冒頭にある $*$ の数は, その問題の難易度の目安を表しています.

今回 $\mathbb{R}^n$ と書いたら, 断らない限り n 次元 Euclid 空間をさすものとします. また $v, w \in \mathbb{R}^n$ に対し $v \cdot w$ で Euclid 内積を表し, $|v|$ で Euclid 内積に関する長さを表します. また行列ないしベクトル X に対し, ${}^T X$ は X の転置行列を表します.

5.1　平面曲線のパラメータ表示

定義. 部分集合 $C \subset \mathbb{R}^2$ を考える. 閉区間 $I \subset \mathbb{R}$ と C^∞ 級写像

$$\gamma :\ I \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) \,=\, \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

があって $C = \gamma(I)$ が成り立つとき, C を**平面曲線**と呼ぶ. また写像 γ を C の**パラメータ表示**と呼ぶ.

定義 5.1. $\gamma = \gamma(t) : I = [a, b] \to \mathbb{R}^2$ を平面曲線 C のパラメータ表示とする.

(1) $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ を**接ベクトル**または速度ベクトルと呼び, $\gamma''(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ を加速度ベクトルと呼ぶ.

(2) **曲線** C **の長さ** $L(C)$ を次式で定める.

$$L(C) \,:=\, \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \,=\, \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

(3) 任意の $t \in I$ に対して $|\gamma'(t)| = 1$ であるとき, γ は**弧長パラメータ表示**であるという.

問題 5.1 ($*$)**.** $R \in \mathbb{R}_{>0}$ とする. パラメータ表示 $\gamma : I = [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = {}^T\bigl(R\cos t, R\sin t\bigr)$ を持つ平面曲線 C を考える.

(1) $\gamma'(t)$ と $\gamma''(t)$ を求めよ.

(2) C の長さを求めよ.

(3) $\widetilde{\gamma} : [0, 2\pi R] \to \mathbb{R}^2$, $\widetilde{\gamma}(s) := {}^T\bigl(R\cos(s/R), R\sin(s/R)\bigr)$ は C の弧長パラメータ表示であることを示せ.

問題 5.2 ($*$)**.** 平面曲線 C のパラメータ表示 $\gamma(t)$ において, パラメータが $[0, t]$ を動いたときの曲線の長さ

$$s \,:=\, \int_0^t |\gamma'(u)|\, du$$

は t の関数である. このとき, 逆に t を s の関数とみなして $\widetilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s))$ と定めるとき, $\widetilde{\gamma}(s)$ は C の弧長パラメータ表示であることを示せ.

問題 5.3 ($*$)**.** $\gamma(s)$ を平面曲線 C の弧長パラメータ表示とするとき, $\gamma'(s) = \frac{d}{ds}\gamma(s)$ と $\gamma''(s) = \frac{d^2}{ds^2}\gamma(s)$ は直交することを示せ.

[*1] 2018/05/17 版, ver. 0.3.

5.2 平面曲線の曲率

この節では曲線と言ったら平面曲線を意味するものとする．

定義． $\gamma(s)$ を曲線 C の弧長パラメータ表示とする．接ベクトル $\gamma'(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$ を反時計方向に $90°$ 回転させて得られる以下のベクトル $n(s)$ を**単位法線ベクトル**という．

$$n(s) := \begin{pmatrix} -y'(s) \\ x'(s) \end{pmatrix}$$

弧長パラメータ表示の定義 5.1 (3) から任意の s について $|\gamma'(s)| = 1$ なので $|n(s)| = 1$, つまり単位法線ベクトルは単位ベクトルである．また問題 5.3 より $\gamma''(s)$ は $n(s)$ と平行なので次のように書ける．

$$\gamma''(s) = \kappa(t)\, n(s), \quad \kappa(s) \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

定義． 式 (5.1) で定まる $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ を曲線 C の点 $\gamma(s)$ における**曲率** (curvature) という．

曲率は

$$\kappa(s) := \gamma''(s) \cdot n(s) = \det\bigl(\gamma'(s), \gamma''(s)\bigr)$$

とも表せる．また $|\kappa(s)| = |\gamma''(s)|$ が成り立つ．

問題 5.4 (∗)**.** 問題 5.1 の曲線 C の曲率を求めよ．

問題 5.5 (∗ **クロソイド**)**.** 次のパラメータ表示 $\gamma : [0, \infty] \to \mathbb{R}^2$ を持つ曲線を考える．

$$\gamma(s) := \begin{pmatrix} c(s) \\ s(s) \end{pmatrix}, \quad c(s) := \int_0^s \cos(u^2/2)\, du, \quad s(s) := \int_0^s \sin(u^2/2)\, du.$$

(1) $\gamma(s)$ が弧長パラメータ表示であることを示せ．
(2) 曲率 $\kappa(s)$ を求めよ．
(3) この曲線を図示せよ

問題 5.6 (∗)**.** 弧長パラメータ表示 $\gamma(s) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ を持つ曲線を考える．関数 $\theta(s)$ を次式で定める．

$$\gamma'(s) = \begin{pmatrix} \cos\theta(s) \\ \sin\theta(s) \end{pmatrix}.$$

(1) $\gamma''(s)$ と $n(s)$ を $\theta(s)$ を用いて表せ．
(2) 次の 2 つの等式を示せ．

$$\theta'(s) = \kappa(s), \quad \theta(b) - \theta(a) = \int_a^b \kappa(s)\, ds.$$

問題 5.7 (∗)**.** 弧長パラメーター $\gamma(s)$ を持つ曲線 C を考える．$e_1(s) := \gamma'(s)$, $e_2(s) := n(s)$ とする．このとき以下の行列の等式が成立することを示せ．この等式を**平面曲線の Frenet-Serret の公式**と呼ぶ．

$$\bigl(e_1'(s), e_2'(s)\bigr) = \bigl(e_1(s), e_2(s)\bigr) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

命題 5.2. $\gamma(t) = {}^T\big(x(t), y(t)\big)$ を曲線 C の (弧長パラメータ表示とは限らない) パラメータ表示とする．この時, C の $\gamma(t)$ における曲率 $\kappa(t)$ について

$$\kappa(t) \;=\; \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\big(x'(t)^2 + y'(t)^2\big)^{3/2}} \;=\; \frac{\det\big(\gamma'(t), \gamma''(t)\big)}{|\gamma'(t)|^3}.$$

問題 5.8 (∗ 二次曲線)**.** 以下の曲線の各点での曲率を求めよ．また曲率の最大値と最小値およびそれらを与える点を求めよ．

(1) 直線 $y = ax + b$.

(2) 放物線 $y = ax^2 + bx + c$.

(3) 楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. 但し $a \geq b > 0$ とする．

(4) 双曲線 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. 但し $a \geq b > 0$ とする．

問題 5.9 (∗ **カテナリー**)**.** パラメータ表示 $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = {}^T\big(t, \cosh t\big)$ を持つ曲線の長さと点 $\gamma(t)$ における曲率を計算せよ．

問題 5.10 (∗ **サイクロイド**)**.** パラメータ表示 $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = {}^T\big(t - \sin t, 1 - \cos t\big)$ を持つ曲線の長さと点 $\gamma(t)$ における曲率を計算せよ．

問題 5.11 (∗∗)**.** 命題 5.2 を証明せよ．

5.3 空間曲線の曲率

この節では空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲線を考える．空間ベクトル $v = {}^t(x_1, y_1, z_1), w = {}^t(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ の外積

$$v \times w \;:=\; \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

は v と w に垂直で, また v と w のなす角度を θ とすると $|v \times w| = |v|\,|w| \sin\theta$ となることを思い出しておく．

定義. 部分集合 $C \subset \mathbb{R}^3$ を考える．閉区間 $I \subset \mathbb{R}$ と C^∞ 級写像

$$\gamma :\; I \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

があって $C = \gamma(I)$ が成り立つとき, C を**空間曲線**と呼ぶ．また写像 γ を C の**パラメータ表示**と呼ぶ．

定義 5.3. 空間曲線 C がパラメータ表示 $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = {}^T\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ をもつとする．

(1) $\gamma'(t) = {}^T\big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)$ を**接ベクトル**ないし速度ベクトルと呼ぶ．

(2) $e(t) := \gamma'(t)/|\gamma'(t)|$ を**方向ベクトル**と呼ぶ．

(3) $n(t) := e'(t)/|e'(t)|$ を**単位法線ベクトル**と呼ぶ．

(4) $e(t)$ と $n(t)$ の外積を $b(t) := e(t) \times n(t)$ と書く．

問題 5.12 (∗)**.** $\gamma(t)$ を空間曲線 C のパラメータ表示とし, 定義 5.3 の記号を用いる．$e(t), n(t), b(t) \in \mathbb{R}^3$ を縦ベクトルと考えて, 3×3 行列 $A(t) := \big(e(t), n(t), b(t)\big)$ を定める．また行列 $B(t)$ を次式で定める．

$$\frac{d}{dt}A(t) \;=\; A(t)B(t) \tag{5.2}$$

(1) $A(t)$ が直交行列であること, また上に書いたような $B(t)$ が存在する*2ことを示せ.

(2) ${}^T B(t) + B(t) = 0$ となることを示せ.

(3) $B(t)$ の $(1,3)$ 成分 $B_{13}(t)$ および $(3,1)$ 成分 $B_{31}(t)$ は常に 0 であることを示せ.

定義. 引き続き定義 5.3 の記号を用いる. 問題 5.12 より行列 $B(t)$ は

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & -B_{21}(t) & 0 \\ B_{21}(t) & 0 & -B_{32}(t) \\ 0 & B_{32}(t) & 0 \end{pmatrix}$$

の形に書ける. この時, $\kappa(t) := B_{21}(t)/|\gamma'(t)|$ を**曲率** (curvature), $\tau(t) := B_{32}(t)/|\gamma'(t)|$ を**捩率** (れいりつ, torsion) という. そして等式 (5.2) を**空間曲線の Frenet-Serret の公式**と呼ぶ.

t が弧長パラメータ s であれば, Frenet-Serret の公式は以下のように書ける.

$$\big(e'(s), n'(s), b'(s)\big) = \big(e(s), n(s), b(s)\big) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

問題 5.13 (∗ **螺旋**)**.** $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ とする. パラメータ表示 $\gamma(t) = {}^T\big(a\cos t, a\sin t, bt\big)$ で与えられる空間曲線の曲率 $\kappa(t)$ と捩率 $\tau(t)$ を求めよ.

問題 5.14 (∗)**.** t **が弧長パラメータの時***3, 次の等式が成立することをを示せ.

$$\tau(t) = \frac{1}{\kappa(t)^2} \det \begin{pmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \\ x'''(t) & y'''(t) & z'''(t) \end{pmatrix}.$$

問題 5.15 (∗)**.** 曲率と捩率が一定. つまり $\kappa(t) = \kappa \neq 0$, $\tau(t) = \tau \neq 0$ となる曲線を求めたい. $a, b, c \in \mathbb{R}$ を次で定める.

$$a := \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}, \quad b := \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}, \quad c := \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}.$$

(1) 次の $A(t)$ が問題 5.12 の微分方程式 (5.2) の解であることを示せ.

$$A(t) := \begin{pmatrix} -a\sin(t/c) & -\cos(t/c) & b\sin(t/c) \\ a\cos(t/c) & -\sin(t/c) & -b\cos(t/c) \\ b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(2) $\gamma(t)$ を求めよ.

5.4 レポート問題

レポート問題 5.1 (∗)**.** 任意に与えられた C^∞ 級関数 $\kappa(t)$ に対して, パラメータ表示 $\gamma(t)$ を持つ平面曲線 C であって各点 $\gamma(t)$ での曲率が $\kappa(t)$ となるものが存在し, またそのような C は回転と平行移動を除いて一意に定まることを示せ.

以上です.

*2 ver. 0.3 で修正しました.

*3 ver. 0.2 で修正しました.