数学演習 VII・VIII　5 月 10 日分小テスト解答[*1]

問題. 対称群 S_3 を考える．これは集合 $[3]=\{1,2,3\}$ の全単射全体からなる集合を，写像の合成 $\circ$ を演算とし，恒等写像 id を単位元とすることで群とみなしたものである．S_3 の元 f を

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}$$

と書くことにする．このとき，S_3 は集合としては

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

と書ける．特に S_3 の位数は 6 である．元 $s_1, s_2 \in S_3$ を次のように定めることにする．

$$s_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad s_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

すると積 $s_1s_2 \in S_3$ は，写像の合成 $f \circ g$ の順番に気を付けると，次のように計算できる．

$$s_1s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) $s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2$ を示せ．これは**組み紐関係式** (braid relation) と呼ばれる重要な等式である．

(2) 元 $s_1s_2 \in S_3$ の位数を求めよ．

(3) S_3 の部分群を全て決定せよ．また，部分群の中で可換なものを全て求めよ．

解答. (1) 問題文中の s_1s_2 の計算を使うと，$s_1s_2s_1$ は

$$s_1s_2s_1 = (s_1s_2)s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

となる．同様に $s_2s_1s_2$ が次のように計算できて，$s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2$ が分かる．

$$s_2s_1s_2 = s_2(s_1s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $s_1^2 = s_2^2 = \mathrm{id}$ と (1) の $s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2$ から以下のようになるので，s_1s_2 の位数は 3.

$$(s_1s_2)^2 = (s_1s_2s_1)s_2 = (s_2s_1s_2)s_2 = s_2s_1 \neq \mathrm{id}, \quad (s_1s_2)^3 = (s_1s_2)(s_2s_1) = \mathrm{id}$$

(3) 部分群は以下の 6 個．このうち可換群なのは S_3 以外の 5 つ．実際，その 5 つは全て巡回群である．

$$\{\mathrm{id}\}, \quad \{\mathrm{id}, s_1\}, \quad \{\mathrm{id}, s_2\}, \quad \{\mathrm{id}, s_1s_2s_1\}, \quad \{\mathrm{id}, s_1s_2, s_2s_1\}, \quad S_3 = \{\mathrm{id}, s_1, s_2, s_1s_2s_1, s_1s_2, s_2s_1\}.$$

コメント. $1+1+3$ 点で採点しました．平均点は 3.5 点でした．

(3) の答えで部分群が尽くされることを示すには，次のように議論すれば良いです: $s_3 := s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2$, $c := s_1s_2$ とおく．$s_2s_1 = c^2$ より $S_3 = \{\mathrm{id}, s_1, s_2, s_3, c, c^2\}$ と書ける．位数 2 の元は s_1, s_2, s_3 の 3 つ，位数 3 の元は c, c^2 の 2 つ．これらがそれぞれ生成する部分群は $\{\mathrm{id}, s_1\}$, $\{\mathrm{id}, s_2\}$, $\{\mathrm{id}, s_3\}$, $\{\mathrm{id}, c, c^2\}$ の 4 つ．

部分群 $H \subset S_3$ が位数 2 の異なる 2 元 s, s' を含むと仮定する．残りの位数 2 の元は s と s' のいくつかの積で書ける．また積 ss' は c または c^2 である．従って必ず $H = S_3$ となる．

次に部分群 $H \subset S_3$ が位数 2 の元 s と位数 3 の元 t を含むとする．積 st は位数 2 の元 $s' \neq s$ になるので，再び s, s' について前の議論を適用して，$H = S_3$ となることが分かる．

以上です．

[*1] 2018/04/27 版, ver. 0.1.