数学演習 VII・VIII 5 月 10 日分解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

4 Lebesgue 積分 1 (測度論)

4.1 可測空間

問題 4.1. 次の 5 通りがある.

$$\{\emptyset, \{1,2,3\}\},$$
$$\{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}, \quad \{\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}, \quad \{\emptyset, \{3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\},$$
$$P(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

問題 4.2. 任意の n に対し $M_n^c \in \mathscr{M}$ なので $\cup_{n=1}^{\infty} M_n^c \in \mathscr{M}$. よって $\cap_{n=1}^{\infty} M_n = (\cup_{n=1}^{\infty} M_n^c)^c \in \mathscr{M}$.

4.2 測度空間

問題 4.3. (1) $\mu(\emptyset) = 0$. $i \neq j$ なら $\{i,j\} = \{i\} \sqcup \{j\}$ だから $\mu(\{i,j\}) = \mu(\{i\}) + \mu(\{j\}) = 2$. また $\{1,2,3\} = \{1,2\} \sqcup \{3\}$ だから $\mu(\{1,2,3\}) = \mu(\{1,2\}) + \mu(\{3\}) = 3$.

(2) $\{1,2\} = \{1\} \sqcup \{2\}$ なので $\mu(\{1,2\}) = \mu(\{1\}) + \mu(\{2\})$. しかし $\mu(\{1\}) = 1$, $\mu(\{1,2\}) = 1/2$ なので $\mu(\{2\}) < 0$ となり非負性に反する. よって条件を満たす測度関数 μ は存在しない.

問題 4.4. (1) 前半について, $j < k$ として一般性を失わない. すると

$$B_j \cap B_k \;=\; \big(A_j \setminus \cup_{i=1}^{j-1} A_i\big) \cap \big(A_k \setminus \cup_{i=1}^{k-1} A_i\big) \;\subset\; A_j \cap \big(A_k \setminus \cup_{i=1}^{k-1} A_i\big) \;\subset\; A_j \cap \big(A_k \setminus A_j\big) = \emptyset$$

より $B_j \cap B_k = \emptyset$. 次に後半について, 帰納法で示す. $n = 1$ なら $B_1 = A_1$ より成立. n まで成立していると仮定して,

$$\begin{aligned}
\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k \;&=\; \bigcup_{k=1}^{n} A_k \cup A_{n+1} \;=\; \bigcup_{k=1}^{n} B_k \cup A_{n+1} \;=\; \bigcup_{k=1}^{n} B_k \cup \big(A_{n+1} \setminus \cup_{k=1}^{n} B_k\big) \\
&=\; \bigcup_{k=1}^{n} B_k \cup \big(A_{n+1} \setminus \cup_{k=1}^{n} A_k\big) \;=\; \bigcup_{k=1}^{n} B_k \cup B_{n+1} \;=\; \bigcup_{k=1}^{n+1} B_k.
\end{aligned}$$

2 番目と 4 番目の等号で帰納法の仮定を用いた. これで $n+1$ のときも成立することが示せた.

(2) n に関する帰納法で示す. $n = 1$ のときの右辺は

$$\mu^*(E \cap B_1) + \mu^*(E \cap B_1^c) = \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \cap A_1^c)$$

となって, $A_1 \in \mathscr{M}^*$ より $\mu(E)$, つまり左辺と一致する. 次に

$$\mu^*(E) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap B_k) + \mu^*\big(E \cap (\cup_{k=1}^{n} B_k)\big)^c \tag{4.1}$$

[*1] 2018/04/23 版, ver. 0.1.

が成立していると仮定する．以下, 簡単のために $B := \cup_{k=1}^{n} B_k$ とおく．$A_{n+1} \in \mathscr{M}$ なので, 式 (4.1) の右辺の最後の項について

$$\mu^*(E \cap B^c) = \mu^*(E \cap B^c \cap A_{n+1}) + \mu^*(E \cap B^c \cap A_{n+1}^c). \tag{4.2}$$

ここで (1) より $B = \cup_{k=1}^{n} A_k$ および $\cup_{k=1}^{n+1} A_k = \cup_{k=1}^{n+1} B_k$ だから

$$B^c \cap A_{n+1}^c = (\cup_{k=1}^{n} A_k)^c \cap A_{n+1}^c = (\cup_{k=1}^{n+1} A_k)^c = (\cup_{k=1}^{n+1} B_k)^c$$

となり, 式 (4.2) の右辺第 2 項について

$$\mu^*(E \cap B^c \cap A_{n+1}^c) = \mu^*\big(E \cap (\cup_{k=1}^{n+1} B_k)^c\big). \tag{4.3}$$

また $B = \cup_{k=1}^{n} A_k$ と (1) の $B_j \neq B_k = \emptyset$ から $B^c \cap A_{n+1} = (\cup_{k=1}^{n} A_k)^c \cap A_{n+1} = B_{n+1}$．よって式 (4.2) の右辺第 1 項について

$$\mu^*(E \cap B^c \cap A_{n+1}) = \mu^*(E \cap B_{n+1}). \tag{4.4}$$

得られた (4.3) と (4.4) を (4.2) に代入して

$$\mu^*(E \cap B^c) = \mu^*(E \cap B_{n+1}) + \mu^*\big(E \cap (\cup_{k=1}^{n+1} B_k)^c\big).$$

これを (4.1) に代入して

$$\mu^*(E) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu^*(E \cap B_k) + \mu^*\big(E \cap (\cup_{k=1}^{n+1} B_k)^c\big),$$

つまり $n+1$ の時に示すべき等式が成立することが分かった．

(3) 簡単のため $A := \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおく．$(E \cap A) \cup (E \cap A^c) = E$ と μ^* の劣加法性から

$$\mu^*(E) = \mu^*\big((E \cap A) \cup (E \cap A^c)\big) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c). \tag{4.5}$$

一方 (2) から議論をはじめて

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap B_k) + \mu^*\big(E \cap (\cup_{k=1}^{n} B_k)\big) \quad [(2) \text{ より}] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap B_k) + \mu^*\big(E \cap (\cup_{k=1}^{n} A_k)\big) \quad [(1) \text{ の } \cup_{k=1}^{n} B_k = \cup_{k=1}^{n} A_k \text{ より}] \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap B_k) + \mu^*(E \cap A^c) \quad [E \cap A^c \subset E \cap (\cup_{k=1}^{n} A_k)^c \text{ と } \mu^* \text{ の単調性より}] \\
&\geq \mu^*\big(\cup_{k=1}^{n} (E \cap B_k)\big) + \mu^*(E \cap A^c) \quad [\mu^* \text{ の劣加法性より}] \\
&= \mu^*\big(E \cap (\cup_{k=1}^{n} B_k)\big) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*\big(E \cap (\cup_{k=1}^{n} A_k)\big) + \mu^*(E \cap A^c) \quad [(1) \text{ より}].
\end{aligned}$$

右辺は任意の n について成立する．μ^* の単調性から $\mu^*\big(E \cap (\cup_{k=1}^{n} A_k)\big)$ は n に関する単調増加数列で, μ^* の値が $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ であることから, この数列は $+\infty$ に発散するか有限値に収束するかのどちらかである．どちらにせよ極限は $\mu(E \cap A)$ と一致し,

$$\mu^*(E) \geq \mu^*\big(E \cap (\cup_{n=1}^{\infty} A_n)\big) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \tag{4.6}$$

となる．(4.5) と (4.6) から結論を得る．

問題 4.5. (1) 可測空間の 3 条件を確認する.

$A=\emptyset$ または $A=S$ なら, 任意の $E\subset S$ について $\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)=0+\mu^*(E)=\mu^*(E)$ なので, $\emptyset, S\in\mathscr{M}$.

$A\in\mathscr{M}$ なら, $(A^c)^c=A$ より任意の $E\subset S$ について $\mu^*(E\cap A^c)+\mu^*(E\cap(A^c)^c)=\mu^*(E\cap A^c)+\mu^*(E\cap A)=\mu^*(E)$ なので $A^c\in\mathscr{M}$.

$A_1,A_2,\ldots\in\mathscr{M}$ なら, 問題 4.4 (3) より $\cup_{i=1}^\infty A_i\in\mathscr{M}$.

(2) 測度空間の 2 条件を確認する. 非負性は外測度 μ^* の非負性から従う. 完全加法性を示すために, $A_1,A_2,\ldots\in\mathscr{M}$ は互いに素だとする. 問題 4.4 (2) を $E:=\cup_{k=1}^\infty A_k=\sqcup_{k=1}^\infty A_k$ に適用する. 今の場合, 問題 4.4 の記号で $B_k=A_k$ なので, $E\cap B_k=E\cap A_k=A_k$ および $E\cap(\cup_{k=1}^n B_k)^c=E\cap(\cup_{k=1}^n A_k)^c=\sqcup_{k=n+1}^\infty A_k$ となっている. 従って得られる式は

$$\mu^*(\cup_{k=1}^\infty A_k)=\sum_{k=1}^n\mu^*(A_k)+\mu^*(\sqcup_{k=n+1}^\infty A_k).$$

$n\to\infty$ として $\mu^*(\cup_{k=1}^\infty A_k)=\sum_{k=1}^\infty\mu^*(A_k)$ が得られる.

4.3 Lebesgue 測度

問題 4.6. 外測度の 3 条件を確認する. 非負性と単調性は inf で定義していることから簡単に従うので, 劣加法性のみ詳しく議論する.

$A_1,A_2,\ldots\subset\mathbb{R}$ を任意にとる. Lebesgue 外測度 μ^* の定義から, 任意の $\varepsilon>0$ について, 各 A_n に対して

$$\sum_{k=1}^\infty|I_{n,k}|<\mu^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n},\quad A_n\subset\bigcup_{k=1}^\infty I_{n,k}$$

となる半開区間 $I_{n,k}$ $(k=1,2,\ldots)$ が取れる. すると $A:=\cup_{n=1}^\infty A_n$ と $\{I_{n,k}\mid n,k=1,2,\ldots\}$ は

$$\sum_{n,k=1}^\infty|I_{n,k}|<\sum_{n=1}^\infty\mu^*(A_n)+\varepsilon,\quad A\subset\bigcup_{k,n=1}^\infty I_{n,k}$$

を満たす. $\varepsilon>0$ は任意だったので, これから劣加法性

$$\mu^*(A)\le\sum_{n=1}^\infty\mu^*(A_n)$$

が従う.

問題 4.7. (2) を証明すれば十分. $\varepsilon>0$ を任意にとる. $J:=[a,b-\varepsilon/2]\subset I$ は有界閉集合なのでコンパクト集合. $J_k:=(a_k-\varepsilon/2^{k+1},b_k)\supset I_k$ とすると $\sum_{k=1}^\infty|J_k|=\varepsilon/2+\sum_{k=1}^\infty|I_k|$. $J\subset\cup_{k=1}^\infty J_k$ より, 有限部分集合 $K\subset\{1,2,\ldots\}$ があって $J\subset\cup_{k\in K}J_k$. すると

$$|I|=|J|+\frac{\varepsilon}{2}\le\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{k\in K}|J_k|\le\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{k=1}^\infty|J_k|=\varepsilon+\sum_{k=1}^\infty|I_k|.$$

$\varepsilon>0$ は任意だったので $|I|\le\sum_{k=1}^\infty|I_k|$.

問題 4.8 $(*)$**.**　(1) $[a,b)$ を自分自身で被覆することで $\mu^*([a,b)) \le b-a$ が分かる．$\mu^*([a,b)) < b-a$ と仮定すると，ある $\varepsilon > 0$ と半開区間 I_k $(k=1,2,\ldots)$ があって，$[a,b) \subset \cup_{k=1}^\infty I_k$, $\sum_{k=1}^\infty |I_k| = b-a-\varepsilon$ となる．すると問題 4.7 (2) より $b-a = |[a,b)| \le \sum_{k=1}^\infty |I_k| = b-a-\varepsilon$ となり矛盾．

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\{0\} \subset [-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$ なので $\mu^*(\{0\}) \le |[-\varepsilon/2,\varepsilon/2)| = \varepsilon$．これと $0 \le \mu^*(\{0\})$ より $\mu^*(\{0\}) = 0$．

(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $[a,b] \subset [a, b+\varepsilon)$ なので $\mu^*([a,b]) \le b-a+\varepsilon$．よって $\mu^*([a,b]) \le b-a$．一方で $[a,b] = [a,b) \sqcup \{b\}$ と劣加法性，及び (1) と (2) から $\mu^*([a,b]) \le \mu^*([a,b)) + \mu^*(\{b\}) = \mu^*([a,b)) + 0 = b-a$．以上より $\mu^*([a,b]) = b-a$．

(4) $\mathbb{Q}$ は可算集合なので $\mathbb{Q} = \{q_i \mid i = 1,2,\ldots\}$ と書ける．このことと (2) 及び問題 4.10 から $\mu(\mathbb{Q}) = 0$．

問題 4.9. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，半開区間 $I_1, I_2, \ldots$ で $A \subset \cup_{k=1}^\infty I_k$ かつ $\sum_{k=1}^\infty |I_k| \le \mu^*(A) + \varepsilon/2$ となるものが存在する．$I_k = [a_k, b_k)$ と書いたときに

$$J_k := \left(a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, b_k\right), \quad O := \bigcup_{k=1}^\infty J_k$$

と定める．O は開集合 J_k の和集合なので開集合．また $I_k \subset J_k$ から $A \subset O$．さらに

$$\begin{aligned}\mu^*(O \setminus A) = \mu^*(O) - \mu^*(A) &\le \sum_{k=1}^\infty |J_k| - \mu^*(A) \\ &\le \sum_{k=1}^\infty \left(|I_k| + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) - \mu^*(A) \le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^\infty |I_k| - \mu^*(A) \le \varepsilon.\end{aligned}$$

問題 4.10. 任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $k = 1,2,\ldots$ に対し，半開区間 $I_{k,n}$ $(n = 1,2,\ldots)$ であって $A_k \subset \cup_{n=1}^\infty I_{k,n}$ かつ $\sum_{n=1}^\infty |I_{k,n}| < \mu^*(A_k) + \varepsilon/2^k = \varepsilon/2^k$ となるものが存在する．すると $A \subset \cup_{k,n=1}^\infty I_{k,n}$ かつ $\sum_{k,n=1}^\infty |I_{k,n}| < \varepsilon$．よって $\mu^*(A) \le \varepsilon$ となり，$\varepsilon > 0$ は任意にとっていたから $\mu^*(A) = 0$．

連絡事項

5/12(土) は木曜日午後開講授業用の予備日ですが，この数学演習 VII・VIII の振替はしません．

以上です．