**数学演習 VII・VIII　5 月 10 日分問題**[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida`

# 4　Lebesgue 積分 1 (測度論)

$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合, $\mathbb{Q}$ は有理数全体の集合, $\mathbb{R}$ は実数全体の集合を表します.
各問題の冒頭にある $*$ の数は, その問題の難易度の目安を表しています.

## 4.1　可測空間

**注意** (測度を考える動機). 区間 $I \subset \mathbb{R}$ の長さを $\mu(I)$ と書くことにする. 例えば

$$\mu([0,1]) \,=\, 1.$$

区間の和集合であって途中が途切れているものにも長さは考えられる. 例えば

$$\mu([0,1] \cup [2,3]) \,=\, 2.$$

$[0,1]$ や $[0,1]{\cup}[2,3]$ は $\mathbb{R}$ の部分集合なので, もっといろいろな部分集合 $M \subset \mathbb{R}$, つまり冪集合の元 $M \in P(\mathbb{R})$ に対して "長さ" $\mu(M)$ を考えたい. ところが, この議論をまねして安直に**全ての部分集合** $M \in P(\mathbb{R})$ **に対して長さを定義しようとすると**, **矛盾を起す** $\mathbb{R}$ **の部分集合が存在**する.

そこで, $\mathbb{R}$ のすべての部分集合に対して長さを考えるのはやめて, **一部分に限る**ことにする. 即ち適当な

$$\mathscr{L} \subsetneq P(\mathbb{R})$$

(Lebesgue 可測集合族) を導入して, $\mathscr{L}$ に属する部分集合 $M \subset \mathbb{R}$ だけを考えると, その長さ (Lebesgue 測度 $\mu$) を考えることができる. そして上の $[0,1]$ や $[0,1] \cup [2,3]$ は $\mathscr{L}$ に属するように $\mathscr{L}$ が定まる.

可測空間や測度の概念はこの Lebesgue 可測集合や Lebesgue 測度の一般化である.

**定義.** $S$ を集合とする. $S$ の部分集合の族 $\mathscr{M}$ が以下の性質をみたすとき, 組 $(S,\mathscr{M})$ を**可測空間**と呼ぶ.

(1) $\emptyset, S \in \mathscr{M}$.
(2) $M \in \mathscr{M}$ ならば $M^c := S \setminus M \in \mathscr{M}$.
(3) $M_1, M_2, \ldots \in \mathscr{M}$ ならば $\cup_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathscr{M}$.

**例.** 任意の集合 $S$ に対し, $(S,\{\emptyset,S\})$ と $(S,P(S))$ はともに可測空間である. 但し $P(S)$ は $S$ の部分集合全体のなす集合.

**問題 4.1** $(*)$**.** $S=\{1,2,3\}$ について, $(S,\mathscr{M})$ が可測空間となるような $\mathscr{M}$ をすべて求めよ.

**問題 4.2** $(*)$**.** $(S,\mathscr{M})$ を可測空間とする. このとき, $M_1, M_2, \ldots \in \mathscr{M}$ ならば $\cap_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathscr{M}$ となることを示せ.

[*1] 2018/05/23 版, ver. 0.3.

## 4.2 測度空間

**定義.** $(S, \mathscr{M})$ を可測空間とする. $\mathscr{M}$ 上の関数

$$\mu : \mathscr{M} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

が以下の条件をみたしているとき, $\mu$ を**測度関数**と呼び, $(S, \mathscr{M}, \mu)$ を**測度空間**と呼ぶ.

(1) (非負性) $\mu(\emptyset) = 0$ であり, 任意の $M \in \mathscr{M}$ に対して $0 \leq \mu(M) \leq \infty$.

(2) (**完全加法性**または$\sigma$**加法性**) $M_1, M_2, \ldots \in \mathscr{M}$ が互いに交わらない, つまり $m \neq n$ ならば $M_m \cap M_n = \emptyset$ が成り立つとき,

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n).$$

**問題 4.3** $(*)$**.** $S = \{1, 2, 3\}$, $\mathscr{M} = P(S) = \{S$ の部分集合全体 $\}$ とする.

(1) $\mu(\{1\}) = \mu(\{2\}) = \mu(\{3\}) = 1$ となるように, すべての $M \in \mathscr{M}$ に対して $\mu(M)$ を決定せよ.

(2) $\mu(\{1\}) = 1$, $\mu(\{1, 2\}) = 1/2$, $\mu(\{1, 2, 3\}) = 1/3$ となるようなものは存在するか？

一般的に, 可測空間を抽象的に持ち出してきて, それに測度を直接定義するのは難しい. 測度空間を構成する一つの有用な方法として, **外測度**を用いる方法がある.

**定義.** $S$ を集合とする. $P(S)$ 上の関数

$$\mu^* : P(S) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

つまり任意の部分集合 $A \subset S$ に対して $\mu^*(A) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を対応させる関数 $\mu^*$ は, 以下の条件をみたすとき**外測度**とよばれる.

(1) (**非負性**) $\mu^*(\emptyset) = 0$ であり, 任意の部分集合 $A \subset S$ に対して $0 \leq \mu^*(A) \leq \infty$.

(2) (**単調性**) 部分集合 $A, B \subset S$ について, $A \subset B$ ならば $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(3) (**劣加法性**) $A_1, A_2, \ldots \subset S$ について

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

外測度は, 可測集合を指定する必要がなく, また完全加法性より弱い劣加法性だけをみたせば良いので, 測度関数より作りやすい.

外測度が与えられたとき, 以下の方法で測度空間を構成できる.

**定義 4.1.** $S$ を集合とし, $S$ 上の外測度 $\mu^*$ が与えられているとする. $S$ の部分集合 $A$ を考える. 任意の $S$ の部分集合 $E$ に対して

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

が成り立つとき, $A$ は **Carathéodory の意味で可測**であるという. $\mathscr{M}^*$ を Carathéodory の意味で可測な $S$ の部分集合全体がなす族とする.

以下の問題 4.4–4.5 で $(S, \mathscr{M}^*, \mu^*)$ が測度空間になることを証明する.

**問題 4.4** $(**)$**.** $(S, \mathscr{M}^*, \mu^*)$ を定義 4.1 のように取る. $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{M}^*$ ならば $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}^*$ となることを, 以下の順番で証明せよ.

(1) まず任意の部分集合の列 $A_1, A_2, \ldots \in P(S)$ を考える. $B_1 := A_1$, $B_n := A_n \setminus \cup_{k=1}^{n-1} A_k$ $(n \geq 2)$ としたとき,

$$B_k \cap B_j = \emptyset \ (k \neq j), \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$$

となることを示せ. 特に $\cup_{k=1}^{\infty} A_k = \cup_{k=1}^{\infty} B_k$ となる.

(2) $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{M}^*$ と仮定する. このとき $S$ の任意の部分集合 $E$ に対して

$$\mu^*(E) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap B_k) + \mu^*\big(E \cap (\cup_{k=1}^{n} B_k)^c\big)$$

となることを証明せよ.

(3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{M}^*$ と仮定する. このとき $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}^*$ となることを示せ.

**問題 4.5** $(**)$**.** $(S, \mathscr{M}^*, \mu^*)$ を定義 4.1 のように取る.

(1) $(S, \mathscr{M}^*)$ が可測空間になることを証明せよ.

(2) $(S, \mathscr{M}^*, \mu^*)$ が測度空間になることを証明せよ.

## 4.3 Lebesgue 測度

$\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度の構成方法は主に 2 通りある. ここでは Lebesgue 外測度を用いた定義を説明する.

**定義 4.2.** $\mathbb{R}$ の部分集合 $A$ に対して, **Lebesgue 外測度**を

$$\mu^*(A) := \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \,\Big|\, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\Big\}$$

と定義する. 但し $I_k$ は $I_k = [a_k, b_k)$ の形の半開区間で, $|I_k| := b_k - a_k$ と定義する.

**問題 4.6** $(**)$**.** 定義 4.2 によって与えられた $\mu^*$ が $\mathbb{R}$ の外測度となることを証明せよ.

**問題 4.7** $(**)$**.** $I = [a, b)$, $I_k = [a_k, b_k)$ を実数の半開区間とする. このとき, 以下を証明せよ.

(1) $I \subset \cup_{k=1}^{m} I_k$ ならば $|I| \leq \sum_{k=1}^{m} |I_k|$.

(2) $I \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k$ ならば $|I| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|$.

**問題 4.8** $(*)$**.** $\mu^*$ を定義 4.2 によって与えられる $\mathbb{R}$ の Lebesgue 外測度とする. 以下を示せ.

(1) $\mu^*([a, b)) = b - a$.　(2) $\mu^*(\{0\}) = 0$.　(3) $\mu^*([a, b]) = b - a$.　(4) $\mu^*(\mathbb{Q}) = 0$.

**定義.** 定義 4.2 によって与えられた $\mu^*$ を用いて作られる測度空間 $(\mathbb{R}, \mathscr{M}^*, \mu^*)$ を考える. この $\mu^*$ を $\mathbb{R}$ の（Carathéodory の意味での）**Lebesgue 測度**, $\mathscr{M}^*$ に属する $\mathbb{R}$ の部分集合を $\mathbb{R}$ の（Carathéodory の意味での）**Lebesgue 可測集合**と呼ぶ.

以下の問題 4.9–4.10 では, $\mathbb{R}$ の Lebesgue 測度による測度空間 $(\mathbb{R}, \mathscr{M}^*, \mu^*)$ を考える.

**問題 4.9** $(*)$**.** $A \in \mathscr{M}^*$, $\mu^*(A) < \infty$ とする. このとき任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して, ある開集合 $O \supset A$ が存在して $\mu^*(O \setminus A) < \varepsilon$ となることを示せ.

**問題 4.10** $(*)$**.** $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{M}^*$ が任意の $n$ に対して $\mu^*(A_n) = 0$ を満たしているならば, $A := \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ も $\mu^*(A) = 0$ を満たすことを示せ.

**注意.** もともと Lebesgue が与えた Lebesgue 測度の構成は以下のような方法によるもので, 今までに説明したものとは異なっている.

Lebesgue 外測度 $\mu^*$ が与えられたとき, 任意の $A \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\mu_*(A) := \sup\{\mu^*(K) \mid K \text{ は } A \text{ に含まれるコンパクト集合}\}$$

と定義する. このとき、

(1) $\mu^*(A) < \infty$ かつ $\mu^*(A) = \mu_*(A)$ が成り立つとき, $A$ を Lebesgue 可測とよび, $\mu(A) := \mu^*(A)$ と定める.

(2) $\mu^*(A) = \infty$ で, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $A \cap [-n, n]$ が (1) の意味で Lebesgue 可測となるとき, $A$ を Lebesgue 可測とよび, $\mu(A) := \infty$ と定める.

以上の意味で Lebesgue 可測な $\mathbb{R}$ の部分集合を $\mathscr{L}$ とおくと, $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \mu)$ はやはり測度空間となり, 更に

$$(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{M}^*, \mu^*)$$

となることが証明できる. すなわち, この意味での Lebesgue 測度と, Carathéodory の意味での Lebesgue 測度は一致する

## 4.4 レポート問題

**レポート問題 4.1** $(*)$**.** $\mathbb{R}$ の非可算部分集合 $K$ であって, Lebesgue 可測かつ $\mu^*(K) = 0$ となるものを 1 つ挙げよ.

**レポート問題 4.2** $(***)$**.** $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. 濃度 $n$ の有限集合 $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し, $([n], \mathscr{M})$ が可測集合となるような $\mathscr{M}$ は全部でいくつあるか？

## 連絡事項

5/12(土) は木曜日午後開講授業用の予備日ですが, この数学演習 VII・VIII の振替はしません.

以上です.