

数学演習 VII・VIII 4月26日分小テスト解答*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida>

問題. 位相空間 X は次の条件を満たすとき **Hausdorff 空間** であるという.

- 任意の $x, y \in X$ に対し $x \neq y$ ならば x の開近傍 U と y の開近傍 V があって $U \cap V = \emptyset$.
- (1) 位相空間 X に対する次の 2 条件が同値であることを示せ.
- (a) X は Hausdorff 空間である.
- (b) 対角集合 $\Delta := \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$ は積空間 $X \times X$ の閉集合である.
- (2) 位相空間 X が Hausdorff 空間なら, 任意の元 $x \in X$ に対し $\{x\}$ は X の閉集合であることを示せ.

解答. (1) 条件 (b) を書き換えていくと

$$\Delta \text{ が閉集合} \iff X^2 \setminus \Delta \text{ が閉集合}$$

$$\iff \text{任意の } (x, y) \in X^2 \setminus \Delta \text{ に対し, } x \text{ の開近傍 } U \text{ と } y \text{ の開近傍 } V \text{ が存在して } U \times V \subset X^2 \setminus \Delta.$$

ここで $(x, y) \in X^2 \setminus \Delta$ は “ $x \neq y$ なる $x, y \in X$ ” と同じことであり, また

$$U \times V \subset X^2 \setminus \Delta \iff (U \times V) \cap \Delta = \emptyset \iff U \cap V = \emptyset.$$

よって (b) \iff (a) が示せた.

(2) 任意の $x \in X$ を取って固定する. 写像 $i_x : X \rightarrow X^2$ を $i_x(y) := (x, y)$ で定めると, これは連続写像であり, また $\{x\} = i_x^{-1}(\Delta)$. (1) より X が Hausdorff なら Δ は閉集合であり, 閉集合の連続写像による逆像は閉集合だから, $\{x\}$ は閉集合になる.

コメント. (1) は 3 点, (2) は 2 点満点で採点しました. 平均点は 3.3 点でした.

(2) は Hausdorff 性の定義から直接示せます. 解答のように示した人はいませんでした, 有名な論法なので身に着けておくと良いと思います.

以上です.

*1 2018/04/13 版, ver. 0.1.