数学演習 VII・VIII　4 月 19 日分小テスト解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

問題. (1) X, Y を集合とし, $f : X \to Y$ を写像とする. $x, x' \in X$ に対し $f(x) = f(x')$ のときに $x \sim x'$ であると定める. こうして得られる二項関係 $\sim$ が X の同値関係であることを示せ.

(2) X を集合とし, $f : X \to X$ を写像とする. 前項 (1) のように定めた同値関係 $\sim$ を考える. このとき, もし $f \circ f = f$ ならば, $f(X)$ は $X/\sim$ の完全代表系であることを示せ.

解答. (1) 同値関係の定義にある 3 条件を確認すればよい.

(反射律) 任意の $x \in X$ について, $f(x) = f(x)$ なので $x \sim x$.

(対称律) $x \sim x'$ ならば $f(x) = f(x')$ なので $f(x') = f(x)$, つまり $x' \sim x$.

(推移律) $x \sim x'$ かつ $x' \sim x''$ ならば $f(x) = f(x')$ かつ $f(x') = f(x'')$ なので $f(x) = f(x'')$, つまり $x \sim x''$.

(2) 自然な射影 $\pi : X \to X/\sim$ の $f(X) \subset X$ への制限 $p := \pi|_{f(X)} : f(X) \to X/\sim$ が全単射であることを示せばよい.

単射性について. $y, y' \in f(X)$ が $p(y) = p(y')$ を満たすと仮定する. $y = f(x)$, $y' = f(x')$ となる $x, x' \in X$ がとれるが, この時 $p(y) = p(y') \iff f(y) = f(y') \iff f(f(x)) = f(f(x'))$ となり, 仮定 $f^2 = f$ から $f(x) = f(x')$. すなわち $y = y'$ なので, 単射性が示せた.

全射性について. 任意の元 $y \in X/\sim$ はある $x \in X$ を用いて $y = C(x) := \{x' \in X \mid f(x') = f(x)\}$ と書ける. この時 $f(x) \in f(X)$ について, $f(f(x)) = f(x)$ から $f(x) \in C(x) = y$ となるので $p(f(x)) = y$. よって p は全射である.

コメント. (1) は 2 点, (2) は 3 点満点で採点しました. 平均点は 3.4 点でした.
(2) で「f は全単射である」としている方が何人かいましたが, 間違いです. 実際, (線形空間の) 射影 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x, 0)$ は $f \circ f = f$ を満たしますが, 全射ではありませんし, 単射でもありません.

以上です.

[*1] 2018/04/19 版, ver. 0.1.