数学演習 VII,VIII　4 月 19 日分解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

2　復習 2 (位相空間と連続写像)

2.1　位相空間の基本概念

問題 2.1. $\mathcal{T}$ は次の 3 条件を満たす.

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
- 任意の $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ に対し $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$.
- 任意の部分族 $\{O_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}$ に対し $\cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

問題 2.2. 問題 2.1 にある位相空間の 3 条件を確認する.

- $\emptyset \in \mathcal{T}$ は自明に成立する. 近傍系の 1 番目の条件から $X \in \mathcal{T}$ が従う.
- $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ として $x \in O_1 \cap O_2$ を任意にとる. $x \in O_1$ と $O_1 \in \mathcal{T}$ より, ある $U_1 \in \mathcal{U}_x$ が存在して $U_1 \subset O_1$. 同様にある $U_2 \in \mathcal{U}_x$ が存在して $U_2 \subset O_2$. 近傍系の 2 番目の条件から, ある $V \in \mathcal{U}_x$ が存在して $V \subset U_1 \cap U_2$. すると $V \subset O_1 \cap O_2$. 従って位相空間の 2 番目の条件が成立する.
- $\{O_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}$ が与えられたとして, $O := \cup_{i \in I} O_i$ とおく. 任意の $x \in O$ に対し, ある $j \in I$ が存在して $x \in O_j$ となる. $O_j \in \mathcal{T}$ なので, ある $U_x \in \mathcal{U}_x$ が存在して $U_x \subset O_j$. すると $U_x \subset O$ となるので, 位相空間の 3 番目の条件が成立する.

以上で証明できた. なお近傍系の 3 番目の条件は, この問題では使わない.

問題 2.3. 近傍系の 3 条件を確認する.

- $x \in U(x;\varepsilon)$ は $U(x;\varepsilon)$ の定義から明らか.
- 任意の $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_x$ は $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ を用いて $U_1 = U(x;\varepsilon_1)$, $U_2 = U(x;\varepsilon_2)$ と書けるが, このとき $U_3 := U(x;\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$ とすれば, $U_3 \in \mathcal{U}_x$ かつ $U_3 \subset U_1 \cap U_2$. (より正確には $U_3 = U_1 \cap U_2$.)
- $U \in \mathcal{U}_x$ を $U = U(x;\varepsilon)$ と書くと, $y \in U$ に対し $V := U(y;\varepsilon - |x-y|)$ と定めれば, $V \in \mathcal{U}_y$ かつ $V \subset U$.

問題 2.4. (1) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ が開集合であることが簡単に示せるので, $\mathbb{N}$ は閉集合.

(2) $A = (-1, 1)$ となるので, これは開集合.

[*1] 2018/04/18, ver. 0.1.

2.2 閉包, 内点, 境界点

問題 2.5. (1) 任意の部分集合 $A \subset X$ に対し $A \subset \overline{A}$. 従って $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ を示せば十分. $x \in \overline{\overline{A}}$ とし, 任意の $U \in \mathfrak{U}_x$ を取る. $x \in \overline{\overline{A}}$ だから $U \cap \overline{A} \neq \emptyset$. $y \in U \cap \overline{A}$ とすると $U \in \mathfrak{U}_y$. $y \in \overline{A}$ だから $U \cap A \neq \emptyset$. よって $x \in \overline{A}$.

(2) $A \subset A \cup B$ と (3) より $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. B についても同様で, 従って $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. 逆に, 任意の $x \in \overline{A \cup B}$ と任意の $U \in \mathfrak{U}_x$ について, $U \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ から $U \cap A \neq \emptyset$ または $U \cap B \neq \emptyset$. これから $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ が従う.

(3) 定義から簡単に従うので略.

問題 2.6. (1) と (2) は略.
(3) 任意の $x \in X$ に対して $x \in \overline{A} \iff x \in A^\circ \cup \partial A$ を示せば良い.
まず $x \in \overline{A}$ と仮定する. A の定義より, x の任意の近傍 U_x に対して $U_x \cap A \neq \emptyset$. よって任意の近傍 U_x に対して $U_x \not\subset X \setminus A$. すると外点の定義より x は A の外点ではない. 従って x は内点あるいは境界点であるため, $x \in A^\circ \cup \partial A$.
逆に $x \in A^\circ \cup \partial A$ と仮定する. x は A の外点でないので, 任意の近傍 U_x に対して $U_x \not\subset X \setminus A$. すなわち任意の U_x に対して $U_x \cap A \neq \emptyset$. 従って $\overline{A}$ の定義より $x \in \overline{A}$.

問題 2.7. 略.

2.3 連続写像

問題 2.8. 略.

問題 2.9. 略.

問題 2.10. 同値関係の 3 条件を確認する.
反射律: 恒等写像 $\mathrm{id}_X : X \to X$ は同相写像なので $X \simeq X$.
対称律: $f : X \to Y$ が同相写像ならその逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ も同相写像なので, $X \simeq Y$ なら $Y \simeq X$.
推移律: $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ が同相写像ならば合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も同相写像なので, $X \simeq Y$ かつ $Y \simeq Z$ ならば $X \simeq Z$.

2.4 部分空間とコンパクト性

問題 2.11. (1) 同相写像である．f の連続性は連続写像の商であることから従う．f が全単射であることは, $x \geq 0$ なら $f(x) = 1 - 1/(1+x)$, $x \leq 0$ なら $f(x) = 1/(1-x) - 1$ と変形すれば f が単調増加だと分かって, これから簡単に従う．

(2) 同相写像ではない．$(1, 0) \in Y$ は Y の内点だが, その逆像である $0 \in X$ は X の内点ではない．

(3) 同相写像である．f の連続性は (1) と同様の議論から従う．単射性は簡単に分かる．全射性については, Y の任意の元 η を $\eta = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $r \geq 0$ と極座標表示しておいて,

$$\xi := (s\cos\theta, s\sin\theta, t), \quad s := \frac{2r}{r^2+1},\ t := \frac{r^2-1}{r^2+1}$$

と定めれば, $\xi \in X$ かつ $f(\xi) = \eta$ となるので, f が全射だと分かる．

問題 2.12. 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し $U_n := (n-2, n+2) \subset \mathbb{R}$ と定めれば $\{U_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{R}$ の開被覆．しかし, どのように有限部分集合 $J \subset \mathbb{Z}$ をとっても, $i := \min J$, $s := \max J$ とすれば

$$\bigcup_{j \in J} U_j \subset (i-2, s+2) \subsetneq \mathbb{R}$$

だから, この開被覆は有限部分被覆を持たない．

問題 2.13. (1) $X \setminus F$ は開集合だから $V_i = U_i \cup (X \setminus F)$ も開集合．また任意の X の元 x について, $x \in F$ ならある $i \in I$ があって $x \in U_i \subset V_i$, $x \notin F$ ならどの $i \in I$ についても $x \in X \setminus F \subset V_i$ だから, どちらにせよ $x \in \cup_{i \in I} V_i$．よって $X = \cup_{i \in I} V_i$．

(2) $\{U_i \mid i \in I\}$ を F の任意の開被覆とする．(1) のように V_i を定めると $\{V_i \mid i \in I\}$ は X の開被覆．X がコンパクトだと仮定しているので, ある有限部分集合 $J \subset I$ があって $X = \cup_{j \in J} V_j$．ここで $V_j = U_j \cup (X \setminus F)$ から $\cup_{j \in J} V_j = (\cup_{j \in J} U_j) \cup (X \setminus F)$．よって

$$F = F \cap X = F \cap \big((\cup_{j \in J} U_j) \cup (X \setminus F)\big) = F \cap (\cup_{j \in J} U_j) \subset \cup_{j \in J} U_j.$$

つまり開被覆 $\{U_i \mid i \in I\}$ は有限部分開被覆 $\{U_J \mid j \in J\}$ を持つ．よって F はコンパクト．

問題 2.14. $f(A)$ の任意の開被覆 $\{U_i \mid i \in I\}$ について, 各 $i \in I$ に対し $f^{-1}(U_i) \subset X$ は開集合だから．$\{f^{-1}(U_i) \mid i \in I\}$ は A の開被覆．A がコンパクトだと仮定しているので, ある有限部分集合 $J \subset I$ があって $A \subset \cup_{j \in J} f^{-1}(U_j)$．よって $f(A) \subset \cup_{j \in J} U_j$, つまり $\{U_i \mid i \in I\}$ は有限部分被覆 $\{U_i \mid j \in J\}$ を持つ．

2.5 Euclid 空間とコンパクト性

問題 2.15. 略.

問題 2.16. $\alpha \notin X$ と仮定すると, $\mathbb{R} \setminus X$ は開集合なので $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して $U(\alpha; \varepsilon) \subset \mathbb{R} \setminus X$. 特に $\beta := \alpha - \varepsilon/2 \notin X$. これは β が X の上界であることを意味するが, $\beta < \alpha$ なので α が上限であることと矛盾する.

問題 2.17.

(1) $a \in X$ なので $X \neq \emptyset$. $X \subset [a,b]$ だから X は有界.

(2) $\{U_i \mid i \in I\}$ は $[a,b]$ の被覆なので, ある $h \in I$ があって $x_0 \in U_h$. $U_h \subset \mathbb{R}$ は開集合なので, ある $x \in U_h$ があって $x < x_0$. x_0 が上限であることから $x \in X$. よってある有限部分集合 $J \subset I$ があって $[a,x] \subset \cup_{j \in J} U_j$. すると

$$[a, x_0] = [a, x] \cup (x, x_0] \subset (\cup_{j \in J} U_j) \cup U_h = \cup_{j \in J \cup \{h\}} U_j.$$

つまり $[a, x_0]$ は有限開被覆 $\{U_j \mid j \in J \cup \{h\}\}$ を持つ. 従って $x_0 \in X$.

(3) $X \subset [a,b]$ より $x_0 \leq b$. $x_0 < b$ と仮定すると, (2) より $x_0 < y \leq b$ なる任意の y は X に含まれない. 一方で有限部分集合 $J \subset I$ があって $[a, x_0] \subset \cup_{j \in J} U_j$ だから, 特にある $k \in J$ があって $x_0 \in U_k$. U_k は開集合だから, ある $y \in U_k$ があって $x_0 < y \leq b$. すると $y \in U_k \subset \cup_{j \in J} U_j$ となり,「$x_0 < y \leq b$ なる任意の y は X に含まれない」と矛盾する.

問題 2.18. 問題 2.14 より $f(X) \subset \mathbb{R}$ はコンパクト集合. Heine-Borel の定理より $f(X) \subset \mathbb{R}$ は有界閉集合. すると問題 2.16 より $y := \sup f(X)$ は $y \in f(X)$ を満たす. つまり $y = f(x_0)$ なる $x_0 \in X$ が存在する.

以上です.