2018 年度前期 数学演習 VII・VIII　4 月 12 日分[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida`

1　復習 1 (集合と写像, 同値関係と商集合)

1.1　集合に纏わる基本概念

問題 1.1. 略.

1.2　写像に纏わる基本概念

問題 1.2. 略.

問題 1.3. f_A が全単射 $\iff \operatorname{rank} A = n \iff \det A \neq 0$.

1.3　集合の濃度

問題 1.4. (1) 恒等写像 $\mathrm{id}_X : X \to X$ があるので $X \sim X$.
(2) 仮定より全単射 $f : X \to Y$ があるが, その逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ の存在から $Y \sim X$.
(3) 仮定より全単射 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ がある. 合成写像 $g \circ f : X \to Z$ は全単射なので $X \sim Z$.

問題 1.5. 全単射 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ を構成すれば良い. 例えば, $n \in \mathbb{N}$ に対し $k^2 \leq n < (k+1)^2$ なる $k \in \mathbb{N}$ が一意に定まるが, それを用いて

$$f(n) := \begin{cases} \left(k, n - k^2\right) & \text{if } n \leq k^2 + k \\ \left((k+1)^2 - n - 1, k\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

と $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ を定めると, これは全単射である.

問題 1.6. 全単射 $P(X) \to 2^X$ を構成すれば良い. まず $A \in P(X)$, つまり部分集合 $A \subset X$ に対して

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

で写像 $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ が定義できる. $\chi_A \in 2^X$ と思えるから, 対応 $A \mapsto \chi_A$ によって写像 $f : P(X) \to 2^X$ が定まる.

次に $\chi \in 2^X$ を写像 $\chi : X \to \{0, 1\}$ とみなし,

$$A_\chi := \{x \in X \mid \chi(x) = 1\}$$

と定義すると $A \in P(X)$. よって対応 $\chi \mapsto A_{\chi*}$ によって写像 $g : 2^X \to P(X)$ が定まる.

[*1] 2018/04/12 版, ver. 0.2.

定義から容易に $f \circ g = \mathrm{id}_{2^X}$ および $g \circ f = \mathrm{id}_{P(X)}$ が確認できる．よって f は全単射である．

問題 1.7.　(1) 略.

(2) 存在しない．実際, (1) と問題 1.6 より $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}(2^{\mathbb{N}}) = \mathrm{Card}\, P(\mathbb{N})$ だが, 本文の (問題 1.5 の直後の) 命題より $\mathrm{Card}\,\mathbb{N} < \mathrm{Card}\, P(\mathbb{N})$ なので $\mathrm{Card}\,\mathbb{N} \neq \mathrm{Card}([0,1])$.

1.4 同値関係と商集合

集合 X 上の同値関係 $\sim$ とは, 二項関係であって以下の 3 条件を満たすもののことだった.

- 反射律: 任意の $x \in X$ に対し $x \sim x$
- 対称律: $x \sim y$ ならば $y \sim x$
- 推移律: $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$

問題 1.8. 略.

問題 1.9. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) は略. (iii) $\Rightarrow$ (iii) について, $C(x) \cap C(y)$ の元 z を取ると $z \sim x$ かつ $z \sim y$ なので, 対称律と推移律によって $x \sim y$.

問題 1.10. 写像

$$\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (x,y) \longmapsto x - y$$

から写像

$$f : \mathbb{N}^2/\sim \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad \overline{(x,y)} \longmapsto x - y$$

が誘導されることに注意する．実際, $(x,y) \sim (x',y')$ ならば $x - y = x' - y'$ だから, f は well-defined. また写像

$$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}^2/\sim, \quad x \longmapsto \overline{(x,0)}$$

を考えると, $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}^2/\sim}$ と $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ が確認できる．よって f は全単射．また

$$f(\overline{(x+x', y+y')}) = (x+x') - (y+y') = (x-y) + (x'-y') = f((\overline{x,y})) + f((\overline{x',y'}))$$

なので f は条件を満たす.

1.5 商集合からの写像, well-definedness

問題 1.11. (1) well-defined ではない.　(2) well-defined.　(3) well-defined.

問題 1.12. 略.

以上です.