

2018 年度前期 数学演習 VII・VIII 4月12日分問題*¹

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida>

1 復習 1 (集合と写像, 同値関係と商集合)

全問通じて \mathbb{Z} は整数全体の集合, $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ は非負整数全体の集合, \mathbb{R} は実数全体の集合を表します. 各問題の冒頭にある * の数は, その問題の難易度の目安を表しています.

1.1 集合に纏わる基本概念

各自, 以下の概念の定義や記号を確認しておくこと.

空集合 \emptyset , 集合の元 $a \in A$, 部分集合 $B \subset A$;

和集合 $A \cup B$, 共通部分 $A \cap B$, 差集合 $A \setminus B$, 補集合;

積集合 $A \times B$, A^n , $\prod_{i \in I} A_i$, A^I .

問題 1.1 (*). 集合 A, B, C に対し以下の等式が成立することを示せ.

$$(1) A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C). \quad (2) A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

1.2 写像に纏わる基本概念

各自, 以下の概念の定義や記号を確認しておくこと.

写像 $f: X \rightarrow Y$ の定義域 X , 値域 Y , 像 $\text{Im}(f) \subset Y$;

写像の単射性と全射性, 全単射;

写像 $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ の合成 $g \circ f: X \rightarrow Z$.

問題 1.2 (*). X, Y, Z を集合とする. $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ を写像とし, また $g \circ f: X \rightarrow Z$ を f と g の合成写像とする. 以下の主張を証明せよ.

$$(1) g \circ f \text{ が単射ならば } f \text{ は単射.} \quad (2) g \circ f \text{ が全射ならば } g \text{ は全射.}$$

問題 1.3 (**). 実数成分の n 次正方形行列 A に対し, 写像 $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $f_A(x) := Ax$ で定義する. 但しここでは $x \in \mathbb{R}^n$ を $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ のように縦ベクトルとみなし, 行列の積 Ax を取っている. f_A が全単射であるために A が満たすべき必要十分条件を述べよ.

1.3 集合の濃度

問題 1.4 (*). 集合 X, Y に対して全単射 $f: X \rightarrow Y$ が存在するとき $X \sim Y$ と書くことにする. このとき, 任意の集合 X, Y, Z に対して以下が成り立つことを証明せよ.

*¹ 2018/04/12 版, ver. 0.3.

- (1) $X \sim X$. (2) $X \sim Y$ ならば $Y \sim X$. (3) $X \sim Y$ かつ $Y \sim Z$ ならば $X \sim Z$.

定義. X, Y を集合とする.

- (1) 全単射 $X \rightarrow Y$ があるとき, X の濃度と Y の濃度は等しいといい, $\text{Card } X = \text{Card } Y$ と書く.
 (2) 単射 $X \rightarrow Y$ があるとき, X の濃度は Y の濃度以下であるといい, $\text{Card } X \leq \text{Card } Y$ と書く.
 (3) $\text{Card } X \leq \text{Card } Y$ であるが $\text{Card } X = \text{Card } Y$ でないとき, $\text{Card } X < \text{Card } Y$ と書く.

$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して集合

$$[n] := \{1, 2, \dots, n\}$$

を考える. 集合 X が $\text{Card } X = \text{Card}([n])$ を満たすとき, $|X| = n$ と書く. これは “集合 X の元の個数は n 個” という他にない.

事実 (Bernstein の定理). 集合 X, Y について, 2つの単射 $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow X$ が存在するとき, 全単射 $X \rightarrow Y$ が存在する.

証明は, 例えば参考文献 [斎藤 09] の命題 7.2.2 を参照すること.

この事実から次の主張が従う.

$$\text{Card } X \leq \text{Card } Y \text{ かつ } \text{Card } Y \leq \text{Card } X \text{ ならば } \text{Card } X = \text{Card } Y.$$

問題 1.5 (*). \mathbb{N} を非負整数全体の集合とする. $\text{Card } \mathbb{N} = \text{Card}(\mathbb{N}^2)$ を示せ.

命題. 集合 X に対し, その部分集合全体からなる集合を冪集合とよび $P(X)$ と書く. すると

$$\text{Card } X < \text{Card } P(X).$$

証明. 全射 $X \rightarrow P(X)$ が存在しないことを示せば十分. これを対角線論法で示そう. $f: X \rightarrow P(X)$ が全射だと仮定する. 部分集合 $A \subset X$ を $A := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ で定める. f は全射で $A \in P(X)$ だから, ある $a \in X$ があって $A = f(a)$. ここで $a \in A$ とすると, A の定義より $a \notin f(a) = A$ となり矛盾. また $a \notin A$ とすると, A の定義より $a \in f(a) = A$ となり矛盾. よって全射 f は存在しない. \square

問題 1.6 (**). 積集合 $\{0, 1\}^X$ のことを 2^X と書くことにする. $\text{Card } P(X) = \text{Card}(2^X)$ を示せ.

(ヒント: 集合 A, I に対し, 積集合 $A^I = \prod_{i \in I} A$ は I から A への写像の集合 $\text{Map}(I, A)$ と同一視できる.)

問題 1.7 (**). \mathbb{N} を非負整数全体の集合とし, $[0, 1]$ を実閉区間 $\{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1\}$ とする. また前問に引き続き, 積集合 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ のことを $2^{\mathbb{N}}$ と書くことにする.

- (1) 実数の 2 進展開によって全単射 $f: [0, 1] \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ が与えられることを説明せよ.
 (2) 全単射 $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ が存在するか否かを考察せよ.

なお, 選択公理を仮定すると次の主張の前半が示せる.

事実. 集合 X, Y について, 全射 $f: X \rightarrow Y$ が存在すれば単射 $Y \rightarrow X$ が存在する. 特に $\text{Card } Y \leq \text{Card } X$.

証明は, 例えば参考文献 [斎藤 09] の命題 2.7.5 を参照すること.

1.4 同値関係と商集合

各自, 同値関係の定義を復習しておくこと.

問題 1.8 (*). 次の関係 \sim が同値関係であることを示せ.

- (1) $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. \mathbb{Z} において $x \sim y \iff x - y \in m\mathbb{Z}$.
- (2) \mathbb{N}^2 において $(x, y) \sim (x', y') \iff x + y' = x' + y$.
- (3) V を体 K 上の線形空間, W をその部分空間とする. V において $x \sim y \iff x - y \in W$.

定義. 集合 X に同値関係 \sim が与えられているとする. $x \in X$ に対して

$$C(x) := \{y \in X \mid y \sim x\}$$

で定まる X の部分集合 $C(x)$ を, x の \sim に関する同値類と呼ぶ.

問題 1.9 (*). 集合 X に同値関係 \sim が与えられているとする. 任意の $x, y \in X$ に対して, 次の 3 つの条件が互いに同値であることを示せ.

- (i) $x \sim y$.
- (ii) $C(x) = C(y)$.
- (iii) $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$.

この主張から, 同値類の全体は集合 X を互いに交わらない部分集合に分割することが分かる.

定義. \sim を集合 X 上の同値関係とする.

- (1) 同値類全体の集合を集合 X の同値関係 \sim による商集合とよび, X/\sim で表す.
- (2) $x \in X$ にその同値類 $C(x) \in X/\sim$ を対応させる写像

$$X \longrightarrow X/\sim, \quad x \longmapsto C(x)$$

を X から X/\sim への自然な射影と呼ぶ. X/\sim の定義からこの写像は全射である.

問題 1.10 (* 自然数から整数を構成する方法). 問題 1.8 (2) の同値関係 \sim による $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ の同値類を $\overline{(x, y)} \in \mathbb{N}/\sim$ と書く. 商集合 \mathbb{N}^2/\sim から整数全体の集合 \mathbb{Z} への全単射

$$f: \mathbb{N}^2/\sim \longrightarrow \mathbb{Z}$$

であって, $f(\overline{(x+x', y+y')}) = f(\overline{(x, y)}) + f(\overline{(x', y')})$ を満たすものを 1 つ求めよ.

定義. \sim を集合 X 上の同値関係とし, $p: X \rightarrow X/\sim$ を自然な射影とする. 部分集合 $S \subset X$ への p の制限 $p|_S: S \rightarrow X/\sim$ が全単射であるとき, S を X/\sim の完全代表系とよぶ.

例. 問題 1.8 (1) の同値関係 \sim による \mathbb{Z} の商集合を $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ と書く. $S := \{0, 1, \dots, m-1\}$ は $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の完全代表系であり, $|\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}| = m$ である.

1.5 商集合からの写像, well-definedness

問題 1.11 (*). 問題 1.8 (1) で $m = 3$ とした場合の同値関係 \sim による商集合 \mathbb{Z}/\sim を $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ と書く. また $n \in \mathbb{Z}$ の \sim による同値類を $\bar{n} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ と書くことにする.

- (1) 写像 $f: \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(\bar{n}) := 2n$ は well-defined か否か述べよ.
- (2) 写像 $f: \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $f(\bar{n}) := \overline{2n}$ は well-defined か否か述べよ.
- (3) 写像 $f: \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $f(\bar{m}, \bar{n}) := \overline{mn}$ は well-defined か否か述べよ.

問題 1.12 (*). 問題 1.8 (3) の同値関係による商集合 V/\sim を V/W と書く. また $v \in V$ の \sim による同値類 $C(v) \in V/W$ を \bar{v} と書くことにする.

- (1) $f: V/W \times V/W \rightarrow V/W$, $f(\bar{v}, \bar{w}) := \overline{v+w}$ が well-defined であることを示せ.
- (2) $f: K \times V/W \rightarrow V/W$, $f(k, \bar{v}) := \overline{kv}$ が well-defined であることを示せ.
- (3) V/W が K 上の線形空間であることを示せ.

1.6 レポート問題

レポートの締め切りは (今学期末までという自明なものを除いて) 特に設けません.

レポート問題 1.1 (* 線形空間のテンソル積). V と W を (体 K 上の) 線形空間とする.

- (1) 次の性質を満たす線形空間 T と双線形写像 $\tau: V \times W \rightarrow T$ の組 (T, τ) が一意に存在することを示せ.
 - 任意の双線形写像 $\varphi: V \times W \rightarrow U$ に対し, $\psi \circ \tau = \varphi$ となる線形写像 $\psi: T \rightarrow U$ がただ一つ存在する.

T のことを $V \otimes_K W$ ないし $V \otimes W$ と書き, V と W のテンソル積と呼ぶ.

- (2) $(v, w) \in V \times W$ に対し, (1) の写像 τ を用いて

$$v \otimes w := \tau(v, w) \in T = V \otimes W$$

と定める. このとき, もし $\{v_i \mid i \in I\}$ と $\{w_j \mid j \in J\}$ がそれぞれ V と W の基底ならば,

$$\{v_i \otimes w_j \mid (i, j) \in I \times J\}$$

が $V \otimes W$ の基底になることを示せ.

参考文献

[斎藤 09] 斎藤毅 「集合と位相」 大学数学の入門 8, 東京大学出版会 (2009).

以上です.