2017 年度前期 代数学 I/代数学概論 V　7 月 27 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

5　アフィン鏡映群

前回と同様に V を Euclid 空間とし $(\cdot,\cdot)$ をその内積とする。$W = W(\Phi) \le O(V)$ を Weyl 群とする。また $\Delta \subset \Pi \subset \Phi$ を 1 つ取って固定する。

5.4　Coxeter 表示

前回導入した記号や事実を思い出そう:

- $\mathrm{Aff}(V) := \mathrm{GL}(V) \ltimes V$ で V 上のアフィン変換群を表す。
- $\alpha \in \Phi$ に対し $\alpha^\vee := 2\alpha/(\alpha,\alpha) \in V$. $\Phi^\vee := \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Phi\}$ を Φ の双対ルート系と呼ぶ。
- $\alpha \in \Phi$, $k \in \mathbb{Z}$ に対し $s_{\alpha,k} \in \mathrm{Aff}(V)$ を $s_{\alpha,k}(\lambda) := \lambda - ((\lambda,\alpha) - k)\alpha^\vee$ で定める。$s_{\alpha,0} = s_\alpha$ である。
- アフィン Weyl 群 W_{aff} とは $\{s_{\alpha,k} \mid \alpha \in \Phi, k \in \mathbb{Z}\}$ で生成される $\mathrm{Aff}(V)$ の部分群のこと。
- $W_{\mathrm{aff}} = W \ltimes L(\Phi^\vee)$. 但し $L(\Phi^\vee) := \{\sum_i n_i\alpha_i^\vee \mid \alpha_i \in \Phi, n_i \in \mathbb{Z}\}$ は余ルート格子。
- 余ウェイト格子 $\widehat{L}(\Phi^\vee) := \{\lambda \in V \mid (\lambda,\alpha) \in \mathbb{Z}\ \forall\alpha \in \Phi\}$.
- 拡大アフィン Weyl 群 $\widehat{W}_{\mathrm{aff}} := W \ltimes \widehat{L}(\Phi^\vee)$. これは W_{aff} を部分群に含む。
- $s_{\alpha,k}$ の鏡映面 $H_{\alpha,k}$ の集合 $\mathcal{H} := \{H_{\alpha,k} \mid \alpha \in \Phi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- アルコーブとは $V^\circ := V \setminus \cup_{H\in\mathcal{H}} H$ の連結成分。アルコーブの集合を $\mathcal{A}$ と書く。
- $\widehat{W}_{\mathrm{aff}}$ は $\mathcal{A}$ に置換で作用する。
- W_{aff} の $\mathcal{A}$ への置換作用は推移的。
- $A_\circ := \{\lambda \in V \mid 0 < (\lambda,\alpha) < 1\ \forall\alpha \in \Pi\} = \{\lambda \in V \mid (\lambda,\widetilde{\alpha}) < 1,\ 0 < (\lambda,\alpha)\ \forall\alpha \in \Delta\}$ はアルコーブ。但し $\widetilde{\alpha}$ は最高ルート。
- W_{aff} は $S_{\mathrm{aff}} := \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\} \sqcup \{s_{\widetilde{\alpha},1}\}$ で生成される。

今回の主目標は次の定理の証明である。

定理. $(W_{\mathrm{aff}}, S_{\mathrm{aff}})$ は Coxeter 系。

証明の前にアフィン Weyl 群に対応する Coxeter グラフを考えよう。
S_{aff} の定義より Coxeter グラフの頂点集合は有限 Weyl 群のものに $s_{\widetilde{\alpha},1}$ に対応した頂点を加えたものになる。
よってあとは各 $\alpha \in \Delta$ に対し $s_\alpha s_{\widetilde{\alpha},1}$ の位数を求めればよい。
この位数は (二面体群の時の計算を思い出すと) H_α と $H_{\widetilde{\alpha},1}$ のなす角度から決まる。よって §2.8 の (結晶的) ルート系の実現のデータから計算することができる。結果は

定理. Coxeter 系 $(W_{\mathrm{aff}}, S_{\mathrm{aff}})$ の Coxeter グラフは §2.5 の半正定値グラフである。より正確に述べると、X_n 型ルート系 Φ に付随したアフィン Weyl 群の Coxeter グラフは $\widetilde{X}_n$ 型半正定値グラフになる。

5.5　鏡映面の数え上げ

有限鏡映群の Coxeter 表示の際、長さ関数 $\ell(w) = n(w)$ が重要であった。アフィン Weyl 群についても関数 ℓ, n の類似を導入することにする。

[*1] 2017/07/26 版, ver. 0.2.

定義. $w \in W_{\mathrm{aff}}$ を生成系 S_{aff} の積で表示した時の長さの最小値を w の**長さ** (length) と呼び $\ell(w)$ と書く。またそのような w の表示を**簡約表示** (reduced expression) と呼ぶ。

定義. $w \in \widehat{W}_{\mathrm{aff}}$ に対し

$$\mathcal{N}(w) := \{H \in \mathcal{H} \mid H \text{ はアルコーブ } A_\circ \text{ と } wA_\circ \text{ を隔てる }\}$$

と定める。また $n(w) := |\mathcal{N}(w)|$ とする。

注意. (1) $w^{-1}\mathcal{N}(w) = \mathcal{N}(w^{-1})$ なので $n(w) = n(w^{-1})$.
(2) $n(e) = \ell(e) = 0$.
(3) $s \in S_{\mathrm{aff}} \Longrightarrow \mathcal{N}(s) = \{H_s\} \Longrightarrow n(s) = 1$. 但し s に対応する鏡映を H_s と書いた。

命題. $w \in \widehat{W}_{\mathrm{aff}}$, $s \in S_{\mathrm{aff}}$ とする。s に対応する鏡映を H_s と書く。
(a) H_s は $\mathcal{N}(w^{-1})$ か $\mathcal{N}(sw^{-1})$ のどちらか一方のみに含まれる。
(b) $s(\mathcal{N}(w^{-1}) \setminus \{H_s\}) = \mathcal{N}(sw^{-1}) \setminus \{H_s\}$.
(c) $H_s \in \mathcal{N}(w^{-1})$ なら $n(ws) = n(w) - 1$, そうでなければ $n(ws) = n(w) + 1$.

証明. 簡単のため $H \in \mathcal{H}$ がアルコーブ A と B を隔てることを $A|_H B$ と書き、隔てないことを $A \not|_H B$ と書く。$A \not|_H B$ は A と B が H に関して同じ側にあるということである。
(a) H_s が両方の集合に含まれると仮定する。$H_s \in \mathcal{N}(w^{-1})$ より

$$A_\circ|_{wH_s} wA_\circ. \tag{5.1}$$

また $H_s \in \mathcal{N}(sw^{-1})$ より $A_\circ|_{H_s} sw^{-1}A_\circ$ だが、$sH_s = H_s$ より $sA_\circ|_{H_s} w^{-1}A_\circ$. 従って

$$wsA_\circ|_{wH_s} A_\circ. \tag{5.2}$$

(5.1) と (5.2) から $wA_\circ \not|_{wH_s} wsA_\circ$. すると $A_\circ \not|_{H_s} sA_\circ$ となり矛盾する。H_s がどちらの集合にも含まれないと仮定しても同様の議論で矛盾を得る。
(b) 左辺が右辺に含まれることを示す。$H \neq H_s$ が $\mathcal{N}(w^{-1})$ に含まれるとする。$sH \neq H_s$ なので $sH \in \mathcal{N}(sw^{-1})$ を示せばよい。そうでないと仮定すると $A_\circ \not|_{sH} sw^{-1}A_\circ$. よって

$$wsA_\circ \not|_{wH} A_\circ. \tag{5.3}$$

また $H \in \mathcal{N}(w^{-1})$ より $wA_\circ|_{wH} A_\circ$ なので、(5.3) と合わせて $wA_\circ|_{wH} wsA_\circ$. つまり

$$sA_\circ|_H A_\circ.$$

これは $H \in \mathcal{N}(s) = \{H_s\}$ を意味するが、H の取り方と矛盾する。逆の包含関係はこの議論で w を ws に置き換えれば従う。
(c) は (a) と (b) から直ちに従う。 □

系. $w \in W_{\mathrm{aff}}$ なら $n(w) \le \ell(w)$.

証明. 有限鏡映群の場合と同様で、命題 (c) を使って $\ell(w)$ に関する帰納法で示せる。 □

5.6 $\mathcal{A}$ への作用の単純推移性

定理. (a) $w = s_1 \cdots s_r$ を $w \in W_{\mathrm{aff}}$, $w \neq e$ の簡約表示とする。$H_i := H_{s_i}$ とすると

$$\mathcal{N}(w) = \{H_1, s_1H_2, s_1s_2H_3, \ldots, s_1\cdots s_{r-1}H_r\}.$$

更に右辺に現れる鏡映面は互いに異なる。
(b)$n|_{W_{\mathrm{aff}}} = \ell$.
(c) W_{aff} は $\mathcal{A}$ に単純推移的に作用する。

証明. (a) まず右辺に現れる鏡映面が全て異なることを示す。$1 \leq p < q \leq r$ で $s_1 \cdots s_{p-1} H_p = s_1 \cdots s_{q-1} H_q$ だとすると $H_p = s_p \cdots s_{q-1} H_q$. §5.2 の系から $s_p = (s_p \cdots s_{q-1}) s_q (s_{q-1} \cdots s_p)$ なので $s_{p+1} \cdots s_{q-1} = s_p \cdots s_q$ となり簡約表示であることと矛盾する。
次に等式 $\mathcal{N}(w) = \{H_1, s_1 H_2, \ldots\}$ を $\ell(w)$ に関する帰納法で示す。$w = s \in S_{\mathrm{aff}}$ なら $\mathcal{N}(s) = \{H_s\}$ だから正しい。$r = \ell(w) > 1$ なら帰納法の仮定から

$$\mathcal{N}(s_2 \cdots s_r) = \{H_2, s_2 H_3, \cdots, s_2 \cdots s_{r-1} H_r\}.$$

もし H_1 がこの $r-1$ 個の鏡映面に現れるなら $H_1 = s_1 H_1 \in \{s_1 H_2, s_1 s_2 H_3, \cdots, s_1 \cdots s_{r-1} H_r\}$ となって既に示したことと矛盾する。よって $H_1 \notin \mathcal{N}(s_1 w)$. ここで前節 §5.5 の命題を $s = s_1$, $w^{-1} = s_2 \cdots s_r$ に適用すると、命題 (a) から $H_1 \in \mathcal{N}(w)$ となり、命題 (b) から $\mathcal{N}(w) = \{H_1, s_1 H_2, \ldots\}$ が得られる。
(b) は (a) から従う。
(c) W_{aff} が $\mathcal{A}$ に推移的に作用することは既に知っているので、$w \neq e$ で固定されるアルコーブが無いことを示せばよい。固定されるアルコーブ A が存在すると仮定すると、推移性をもう一度使って $A = A_\circ$ として構わない。すると $wA_\circ = A_\circ$ だが、$\mathcal{N}(w) = \emptyset$ となり (a) と矛盾する。 □

5.7 Coxeter 表示の証明

定理. $w = s_1 \cdots s_r$ を $w \in W_{\mathrm{aff}}$ の簡約表示とする。$s \in S_{\mathrm{aff}}$ が $\ell(ws) < \ell(w)$ を満たすなら、ある $1 \leq i \leq r$ が存在して $ws = s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_r$.

証明. $w^{-1} = s_r \cdots s_1$ が簡約表示であることと前節 §5.6 の定理 (c) から

$$\mathcal{N}(w^{-1}) = \{H_r, s_r H_{r-1}, \ldots, s_r \cdots s_2 H_1\}.$$

仮定と §5.5 命題 (c) 及び §5.6 定理の $n = \ell$ から $H_s \in \mathcal{N}(w^{-1})$. そこで $H_s = s_r \cdots s_{i+1} H_i$ $(1 \leq i \leq r)$ とすると §5.2 の系から $s = (s_r \cdots s_{i+1}) s_i (s_{i+1} \cdots s_r)$. つまり $s_{i+1} \cdots s_r s = s_i s_{i+1} \cdots s_r$. これから $ws = s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_r$ となる。 □

これで §1.9 の有限鏡映群の時と同じ状況になったので、アフィン Weyl 群が Coxeter 群であることも同じ議論で分かる。

参考文献

Humphreys, “Reflection Groups and Coxeter Groups”, §§4.4–4.7.

この講義はこれでおしまいです。