2017 年度前期 代数学 I/代数学概論 V　7 月 20 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

5　アフィン鏡映群

残り 2 回の講義でアフィン Weyl 群を扱います。Humphreys の本の 4 章の内容です。

5.1　アフィン鏡映

今まで通り V を Euclid 空間とし $(\cdot,\cdot)$ をその内積とする。

$\lambda \in V$ に対し V 上の平行移動が $t(\lambda): v \mapsto v+\lambda$ で定まる。これら平行移動は V と同型な群をなすが、それを V と書く。$\mathrm{GL}(V)$ と V はともに $\mathrm{Aut}(V)$ の部分群である。

定義. V 上の**アフィン変換群** (affine group)$\mathrm{Aff}(V)$ とは、$\mathrm{GL}(V)$ と平行移動のなす群 V で生成される $\mathrm{Aut}(V)$ の部分群のことである。

$g \in \mathrm{GL}(V)$, $\lambda \in V$ について

$$g\, t(\lambda)\, g^{-1} = t(g\lambda) \tag{5.1}$$

となる。これから $\mathrm{Aff}(V)$ は半直積 $\mathrm{Aff}(V) = \mathrm{GL}(V) \ltimes V$ になることが分かる。

定義. $\alpha \in V \setminus \{0\}$ と $k \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\alpha^\vee := \frac{2}{(\alpha,\alpha)}\alpha, \quad H_{\alpha,k} := \{\lambda \in V \mid (\lambda,\alpha) = k\}.$$

また $s_{\alpha,k} \in \mathrm{Aff}(V)$ を次式で定める.

$$s_{\alpha,k}(\lambda) := \lambda - ((\lambda,\alpha)-k)\alpha^\vee.$$

注意. (1) 定義から $H_{\alpha,k} = H_{-\alpha,-k}$ 及び $H_{\alpha,0} = H_\alpha$ が分かる。また $H_{\alpha,k}$ は H_α を $\frac{k}{2}\alpha^\vee = \frac{k}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ だけ平行移動したものである。

(2) $s_{\alpha,k}$ は $H_{\alpha,k}$ に関する鏡映である。特に $s_{\alpha,0} = s_\alpha$.

(3)

$$s_{\alpha,k} = t(k\alpha^\vee)s_\alpha. \tag{5.2}$$

定義. $W = W(\Phi) \le O(V)$ を (有限)Weyl 群とする。鏡映面の集合 $\mathcal{H}$ を次のように定める。

$$\mathcal{H} := \{H_{\alpha,k} \mid \alpha \in \Phi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

命題. (a) $w \in W$, $\alpha \in \Phi$ に対し

$$wH_{\alpha,k} = H_{w\alpha,k}, \quad ws_{\alpha,k}w^{-1} = s_{w\alpha,k}.$$

(b) $(\lambda,\alpha) \in \mathbb{Z}$ となる $\lambda \in V$, $\alpha \in \Phi$ に対し

$$t(\lambda)H_{\alpha,k} = H_{\alpha,k+(\lambda,\alpha)}, \quad t(\lambda)\, s_{\alpha,k}\, t(-\lambda) = s_{\alpha,k+(\lambda,\alpha)}.$$

証明はレポート問題にする。

*1 2017/07/19 版, ver. 0.2.

5.2　アフィン Weyl 群

引き続き $W = W(\Phi) \leq O(V)$ を Weyl 群とする。

定義. (W に付随する) **アフィン Weyl 群** (affine Weyl group) W_{aff} とは $\{s_{\alpha,k} \mid \alpha \in \Phi, k \in \mathbb{Z}\}$ で生成される $\mathrm{Aff}(V)$ の部分群のこと。

例. $W = W(\mathrm{A}_1) = \mathfrak{S}_2 = \{e, s_\alpha\}$ なら

$$W_{\mathrm{aff}} = \langle s_\alpha, s_{\alpha,1} \mid s_\alpha^2 = s_{\alpha,1}^2 = e \rangle.$$

この群を無限位数二面体群 (infinite dihedral group) と呼び $\mathcal{D}_\infty$ と書く。またこの W_{aff} を $\widetilde{\mathrm{A}}_1$ 型と呼ぶ。

アフィン Weyl 群の構造を考えるために、いくつか Weyl 群のルート系に纏わる概念を導入する。

定義. (1) W ないし Φ の**ルート格子** (root lattice) $L(\Phi)$ とは

$$L(\Phi) := \mathbb{Z}\Phi = \left\{ \textstyle\sum_i n_i \alpha_i \mid \alpha_i \in \Phi, n_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(2) W ないし Φ の**ウェイト格子** (weight lattice) $\widehat{L}(\Phi)$ とは

$$\widehat{L}(\Phi) := \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z} \ \ \forall \alpha \in \Phi\}.$$

定義. 結晶的ルート系 Φ の**双対ルート系** (dual root system) $\Phi^\vee$ とは $\{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Phi\}$ のこと。

注意. $\Phi^\vee$ は結晶的ルート系である。Φ_{X_n} を X_n 型ルート系とすると、X_n が simply-laced の場合、つまり ADE 型なら $(\Phi_{\mathrm{X}_n})^\vee = \Phi_{\mathrm{X}_n}$. また $(\Phi_{\mathrm{B}_n})^\vee = \Phi_{\mathrm{C}_n}$.

定義. $L(\Phi^\vee)$ を W 又は Φ の**余ルート格子** (coroot lattice), $\widehat{L}(\Phi^\vee)$ を**余ウェイト格子** (coweight lattice) と呼ぶ。つまり

$$L(\Phi^\vee) := \mathbb{Z}\Phi^\vee, \quad \widehat{L}(\Phi^\vee) := \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha) \in \mathbb{Z} \ \ \forall \alpha \in \Phi\}.$$

$L(\Phi^\vee) \subset V$ は V 上の平行移動のなす群とみなせるが、それをまた $L(\Phi^\vee)$ とかく。

命題.

$$W_{\mathrm{aff}} = W \ltimes L(\Phi^\vee).$$

証明. (5.1) より $W' := W \ltimes L(\Phi^\vee)$ は well-defined. (5.2) より W_{aff} の生成元は全て W' に含まれる。また同じ (5.2) から $t(k\alpha^\vee) = s_{\alpha,k} s_\alpha$ なので $t(k\alpha^\vee) \in W_{\mathrm{aff}}$. よって $L(\Phi^\vee) \leq W_{\mathrm{aff}}$ かつ $W \leq W_{\mathrm{aff}}$ となり $W' \leq W_{\mathrm{aff}}$ が従う。 $\square$

(5.1) より $W \ltimes \widehat{L}(\Phi^\vee)$ も well-defined である。$L(\Phi^\vee) \leq \widehat{L}(\Phi^\vee)$ なので次のような命名が自然である。

定義.

$$\widehat{W}_{\mathrm{aff}} := W \ltimes \widehat{L}(\Phi^\vee)$$

を**拡大アフィン Weyl 群** (extended affine Weyl group) と呼ぶ。

注意. W_{aff} は $\widehat{W}_{\mathrm{aff}}$ の正規部分群であり有限指数である。更に $\widehat{W}_{\mathrm{aff}}/W_{\mathrm{aff}} \simeq \widehat{L}(\Phi^\vee)/L(\Phi^\vee)$.

§5.1 の命題から

系. $w \in \widehat{W}_{\mathrm{aff}}$ と $H_{\alpha,k} \in \mathcal{H}$ に対し、ある $\beta \in \Phi$, $l \in \mathbb{Z}$ があって $wH_{\alpha,k} = H_{\beta,l}$. 特に $ws_{\alpha,k}w^{-1} = s_{\beta,l}$.

5.3　アルコーブ

定義. $V^\circ := V \setminus \cup_{H\in\mathcal{H}} H$ と定める。また V° の連結成分を**アルコーブ** (alcove) と呼び、その集合を $\mathcal{A}$ と書く。

注意. §5.2 の最後の系から W_{aff} 及び $\widehat{W}_{\mathrm{aff}}$ は $\mathcal{A}$ に置換で作用することが分かる。

以下 $\Delta \subset \Pi \subset \Phi$ を固定する。また Φ は既約だと仮定する。

定義.

$$A_\circ := \{\lambda \in V \mid 0 < (\lambda, \alpha) < 1 \ \ \forall \alpha \in \Pi\}.$$

補題. $A_\circ$ はアルコーブである。

証明. $A_\circ \subset V^\circ$ は明らか。定義から $A_\circ$ は凸、つまり $\lambda, \mu \in A^\circ$ なら任意の $0 < t < 1$ について $t\lambda + (1-t)\mu \in A^\circ$ である。従って $A_\circ$ は連結。また $V^\circ \setminus A_\circ$ の任意の元はアルコーブ $A_\circ$ と H_α もしくは $H_{\alpha,1}$ と書ける鏡映面で隔てられているので、$A_\circ$ は V° の連結成分だと分かる。 □

例. Φ が $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \mathrm{G}_2$ 型なら $A_\circ$ は内角 $\pi/k, \pi/l, \pi/m$ の三角形になる。但し $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \mathrm{G}_2$ 型それぞれについて $(k, l, m) = (3, 3, 3), (2, 4, 4), (2, 3, 6)$.

補題. $\widetilde{\alpha}$ を Φ の最高ルートとすると

$$A_\circ = \{\lambda \in V \mid (\lambda, \widetilde{\alpha}) < 1, \ \ 0 < (\lambda, \alpha) \ \ \forall \alpha \in \Delta\}.$$

証明. $\widetilde{\alpha} \in \Pi$ なので $A_\circ$ は右辺に含まれる。λ が右辺の元ならば任意の $\alpha \in \Pi$ について $(\lambda, \alpha) > 0$. $\widetilde{\alpha} - \alpha$ もまた単純ルートの和なので $(\lambda, \widetilde{\alpha} - \alpha) \geq 0$. よって $(\lambda, \alpha) \leq (\lambda, \widetilde{\alpha}) < 1$ となって $\lambda \in A_\circ$. □

定義. $A_\circ$ の**壁** (wall) とは H_α $(\alpha \in \Delta)$ 及び $H_{\widetilde{\alpha},1}$ のことである。また S_{aff} を壁に対応する鏡映の集合とする。つまり

$$S_{\mathrm{aff}} := \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\} \sqcup \{s_{\widetilde{\alpha},1}\}.$$

命題. W_{aff} の $\mathcal{A}$ への作用は推移的。また W_{aff} は S_{aff} で生成される。

証明. W' を S_{aff} で生成される W_{aff} の部分群とする。まず W' が $\mathcal{A}$ に推移的に作用することを示す。任意の $A \in \mathcal{A}$ に対しある $w \in W'$ があって $wA = A_\circ$ となることを示せばよい。$\lambda \in A_\circ$, $\mu \in A$ を任意に取って固定する。平行移動群 $L(\Phi^\vee)$ の作用に関する μ の軌道は V の離散部分集合だから、それを有限群 W で拡大して得られる W_{aff} 軌道及び W' 軌道もまた離散部分集合。よって $W'\mu$ に含まれる元 $\nu = w\mu$ であって λ からの距離が最小になるものがある。$\nu \in A_\circ$ が示せれば $wA \cap A_\circ \neq \emptyset$ なので $wA = A_\circ$.

$\nu \notin A_\circ$ と仮定してみる。すると λ, ν は $A_\circ$ の壁 H で隔てられる。$s \in S_{\mathrm{aff}} \subset W'$ を対応する鏡映とする。$\nu, s\nu, s\lambda, \lambda$ を頂点とする四辺形は等脚台形であって H で二分される。等脚台形の対角線の長さと対辺の長さの関係から $\|s\nu - \lambda\| < \|\nu - \lambda\|$. しかし $s\nu \in W'\mu$ だから ν の選び方と矛盾する。

残っている $W' = W_{\mathrm{aff}}$ を示すには、各 $s_{\alpha,k}$ が W' に含まれることを示せばよい。W' が $\mathcal{A}$ を推移的に置換することが分かったから、任意のアルコーブ A についてその壁を $A_\circ$ の壁の像として定義できる。すると任意の鏡映面はあるアルコーブの壁である。特に $H_{\alpha,k}$ がアルコーブ A の壁だとし、また $w \in W'$ を $wA = A_\circ$ なる元だとする。この時 $A_\circ$ の壁 H が存在して $wH_{\alpha,k} = H$ となる。つまり $ws_{\alpha,k}w^{-1} = s$. H に対応する鏡映 s は W' に含まれるから $s_{\alpha,k} \in W'$ となる。 □

参考文献

Humphreys, "Reflection Groups and Coxeter Groups", §§4.1–4.3.

以上です。