

2017 年度前期 代数学 I/代数学概論 V 7 月 6 日分レポート問題*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

レポート問題

講義で分からなかった所、扱ってほしい話題などありましたらレポートに書いて下さい。

ここに挙げた問題以外でも、関連する話題についてレポートにしてください。

レポート問題 1 (10 点). §4.2 の系 $W(t) = \prod_{\alpha \in \Pi} (1 - t^{1+\text{ht}(\alpha)}) / (1 - t^{\text{ht}(\alpha)})$ を使うことで、ADE 型 Weyl 群 W_{X_n} の Poincaré 多項式が以下のようになることを確認せよ

$$W_{X_n}(t) = \prod_{i=1}^n \frac{1 - t^{m_i+1}}{1 - t}.$$

但し m_i は W_{X_n} の指数で以下の通り。

| type | exponents | type | exponents |
|-------|---------------------------------|-------|--------------------------|
| A_n | $1, 2, \dots, n$ | B_n | $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$ |
| D_n | $1, 3, 5, \dots, 2n - 3, n - 1$ | F_4 | $1, 5, 7, 11$ |
| E_6 | $1, 4, 5, 7, 8, 11$ | G_2 | $1, 5$ |
| E_7 | $1, 5, 7, 9, 11, 13, 17$ | | |
| E_8 | $1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ | | |

レポート問題 2 (15 点). 前問以外の既約な Weyl 群、つまり non simply-laced な Weyl 群 W_{X_n} を考える。ルートの W_{X_n} 軌道の数、即ちルートの長さが 2 種類あることに注意して、2 変数 $T = (T_1, T_2)$ の Poincaré 多項式 $W_{X_n}(T)$ を考える。但し T_1 が長ルートに対応するものとする。§4.1 の命題 $W(T) = \prod_{\alpha \in \Pi} (1 - T_\alpha T^{\text{ht}(\alpha)}) / (1 - T^{\text{ht}(\alpha)})$ を使うことで、以下の等式を確認せよ。

$$W_{B_n}(T_1, T_2) = \prod_{i=0}^{n-1} (1 + T_1^i T_2)(1 + T_1 + \dots + T_1^i),$$

$$W_{C_n}(T_1, T_2) = \prod_{i=0}^{n-1} (1 + T_2^i T_1)(1 + T_2 + \dots + T_2^i),$$

$$W_{F_4}(T_1, T_2) = \prod_{j=1}^2 (1 + T_j)(1 + T_j + T_j^2)(1 + T_1 T_2 T_j) \prod_{i=1}^3 (1 + (T_1 T_2)^i),$$

$$W_{G_2}(T_1, T_2) = (1 + T_1)(1 + T_2)(1 + T_1 T_2 + (T_1 T_2)^2).$$

レポート問題 3 (計 10 点). 問題 2 から、non simply-laced の場合でも問題 1 の等式 $W_{X_n}(t) = \prod_{i=1}^n (1 - t^{m_i+1}) / (1 - t)$ が成立することを確認せよ。但し指数は問題 1 の表の通り。

連絡事項

- 来週 7/13 は休講です。次回は 7/20 です。
- レポートの提出期限は 8/8(火) の 17 時までとします。レポート提出 box を教務支援室に用意しますので、講義の最終回 (7/27) 以降はそこに提出して下さい。

以上です。