2017 年度前期 代数学 I/代数学概論 V　7 月 06 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

4 Poincaré 多項式の因数分解定理

初回に紹介した Weyl 群の Poincaré 多項式の因数分解定理の Macdonald による証明を紹介します。

4.1 Macdonald の定理

V を Euclid 空間とし $(\cdot,\cdot)$ をその内積とする。$\Phi \subset V$ を (結晶的) ルート系、つまり付随する有限鏡映群 $W := W(\Phi) \le O(V)$ が Weyl 群になるものとする。単純ルート集合と正ルート集合 $\Delta \subset \Pi \subset \Phi$ を一組取って固定する。

$\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Pi}$ を Π で添え字づけられた (可換な) 不定元の族とする。また V 上の形式的指数関数 e^v $(v \in V)$ を $e^{v+v'} = e^v e^{v'}$ が成立するものとして定める。$e^0 = 1$ と書く。

最後に §1.6 の補題の証明と同様に $\Pi(w) := \Pi \cap w^{-1}(-\Pi)$ とする。$n(w) := |\Pi(w)| = \ell(w)$ であった。

定理.

$$\sum_{w\in W}\prod_{\alpha\in\Pi}\frac{1-u_\alpha e^{-w\alpha}}{1-e^{-w\alpha}} = \sum_{w\in W}\prod_{\alpha\in\Pi(w)} u_\alpha. \tag{4.1}$$

証明は §4.3 以降で与える。

4.2 因数分解定理の導出

まず定理の帰結として Poincaré 多項式の因数分解定理を示しておく。そのために幾つか準備をしておく。

定義. Φ の W 軌道分解を $\Phi = \sqcup_{i\in I}\Phi_i$ と書く。また $\Delta_i := \Delta \cap \Phi_i$ と定める。

注意. Φ が既約だと仮定する。§2.11 より simply-laced なら Φ は 1 つの軌道 ($|I| = 1$), non-simply-laced なら $\Phi = \Phi_s \sqcup \Phi_l$ と 2 つの軌道 ($I = \{s,l\}$) からなる。

高さ関数 $\mathrm{ht}(\alpha)$ を思い出そう。$\alpha \in \Phi$ を $\alpha = \sum_{\beta\in\Delta} c_\beta \beta$ と書いたときに $\mathrm{ht}(\alpha) := \sum_{\beta\in\Delta} c_\beta$ であった。

定義. 各 $i \in I$ に対し $\mathrm{ht}_i(\alpha)$ を次のように定義する: $\alpha = \sum_{\beta\in\Delta} c_\beta\beta$ に対し $\mathrm{ht}_i(\alpha) := \sum_{\beta\in\Delta_i} c_\beta$.

$T = \{T_i\}_{i\in I}$ を I で添え字づけられた不定元とする。

定義. (1) $\alpha \in \Pi$ に対し $\alpha \in \Pi_i$ なら $T_\alpha := T_i$ と定める。
(3) $\alpha \in \Phi$ に対し $T^{\mathrm{ht}(\alpha)} := \prod_{i\in I} T_i^{\mathrm{ht}_i(\alpha)}$.
(3) $w \in W$ に対し $w = s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_q}$ を Δ に関する簡約表示として $T_w := T_{\alpha_1}\cdots T_{\alpha_q}$ と定める。

注意. (1) T_w は簡約表示の取り方によらない。
(2) ℓ_i で s_β $(\beta \in \Delta_i)$ の生成する W の部分群に関する長さ関数を書くと、§1.11 の部分ルート系の議論から

$$T_w = \prod_{i\in I} T_i^{\ell_i(w)}. \tag{4.2}$$

定義. 多変数版の Poincaré 多項式を以下で定義する。

$$W(T) := \sum_{w\in W} T_w.$$

[*1] 2017/07/05 版, ver. 0.2.

注意. 特に全ての不定元を $T_i = t$ と共通のものにすれば $T_w = t^{\ell(w)}$ となるから、$W(T)$ は元来の Poincaré 多項式 $W(t) = \sum_{w\in W} t^{\ell(w)}$ に帰着する。

これで因数分解定理の主張を述べる準備が終わった。

命題.

$$\prod_{\alpha\in\Pi} \frac{1 - T_\alpha T^{\mathrm{ht}(\alpha)}}{1 - T^{\mathrm{ht}(\alpha)}} = W(T).$$

この命題と上の注意から直ちに

系.

$$\prod_{\alpha\in\Pi} \frac{1 - t^{1+\mathrm{ht}(\alpha)}}{1 - t^{\mathrm{ht}(\alpha)}} = W(t).$$

命題の証明. 定理の等式 (4.1) を認めて、それから命題を導出する。環準同型 $\varphi : \mathbb{Q}(u_\alpha, e^\beta) \to \mathbb{Q}(T_i)$ を

$$\varphi(u_\alpha) := T_\alpha \quad (\alpha\in\Pi), \qquad \varphi(e^{-\beta}) := T_i \quad (\beta\in\Delta_i)$$

で定義する。そして φ を式 (4.1) の両辺に施す。

(4.1) の右辺の和の各項は

$$\prod_{\alpha\in\Pi(w)} T_\alpha = \prod_{i\in I} T_i^{|\Pi_i(w)|}$$

に写される。但し $\Pi_i(w) := \Pi(w)\cap\Pi_i$. ここで $n_i(w) := |\Pi_i(w)|$ とすると、§1.11 の部分ルート系の議論と §1.6 の議論から $n_i(w) = \ell_i(w)$. すると (4.2) から (4.1) の右辺は

$$\prod_{i\in I} T_i^{n_i(w)} = \prod_{i\in I} T_i^{\ell_i(w)} = T_w$$

の和に写るので確かに $W(T)$ と一致する。

次に (4.1) の左辺について、各 $\alpha\in\Phi$ に対し $\varphi(e^{-\alpha}) = T^{\mathrm{ht}(\alpha)}$ となるから、左辺は

$$\sum_{w\in W}\prod_{\alpha\in\Pi} \frac{1 - T_\alpha T^{\mathrm{ht}(w\alpha)}}{1 - T^{\mathrm{ht}(w\alpha)}}$$

に写ることが分かる。$w = e$ の項のみ残ることを示したい。$w \neq e$ ならある $\beta\in\Delta$ があって $w^{-1}\beta = -\alpha \in -\Pi$. $\beta\in\Delta_i$ なら $\alpha = s_\alpha w^{-1}\beta$ より $\alpha\in\Pi_i$ なので、$T_\alpha = T_\beta = T_i$ が分かる。すると $T^{\mathrm{ht}(w\alpha)} = T^{-\mathrm{ht}(\beta)} = T_i^{-1}$ より $1 - T_\alpha T^{\mathrm{ht}(w\alpha)} = 1 - T_i T_i^{-1} = 0$. よって $w = e$ の項のみが残る。それは命題の左辺に他ならない。 □

4.3 定理の証明

補題. $\delta := \prod_{\alpha\in\Pi}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})$ とすると $\delta = \sum_{w\in W}\varepsilon(w)e^{w\rho}$. 但し $\varepsilon(w) := (-1)^{\ell(w)}$, $\rho := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Pi}\alpha$.

注意. $W = \mathfrak{S}_n \leq O(\mathbb{R}^n)$ なら $\delta = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j^{1/2}/x_i^{1/2} - x_i^{1/2}/x_j^{1/2}) \sim \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$ でおよそ Vandermonde の行列式 (差積) に等しい。

証明. 簡単のため $P := \frac{1}{2}\mathbb{Z}\Phi \subset V$, $\mathbb{Q}[P] := \mathbb{Q}[e^\gamma; \gamma\in P]$ と書く。$w(e^\gamma) := e^{w\gamma}$ で W の $\mathbb{Q}[P]$ への作用を定義できる。$x\in\mathbb{Q}[P]$ に対し $J(x) := \sum_{w\in W}\varepsilon(w)w(x)$ と定める。また $\mathbb{Q}[P]$ の元 $f = \sum_{\gamma\in P} f_\gamma e^\gamma$ であって任意の $w\in W$ について $w(f) = \varepsilon(w)f$ となるものを交代式と呼ぶことにする。任意の $x\in\mathbb{Q}[P]$ に対し $J(x)$ が交代式になることが簡単に確認できる。

任意の交代式 f は $f = \sum_{\alpha\in C\cap P} f_\alpha J(e^\alpha)$ と書ける。但し $C := \{v\in V \mid (v,\beta) > 0\ \forall\beta\in\Delta\}$ は W の基本領域の内部。実際、$\gamma\in P$ がある $\alpha\in\Pi$ の鏡映面 H_α に含まれるなら $s_\alpha(f) = -f$ から $c_\gamma = 0$ が従い、$\gamma\notin\cup_{\alpha\in\Pi}H_\alpha$ ならある $w\in W$ と $\alpha\in C\cap P$ があって $\gamma = w\alpha$ となるから $f = \sum_{\alpha\in C\cap P}\sum_{w\in W} f_{w(\alpha)}e^{w(\alpha)}$. また $w(f) = \varepsilon(w)f$ より $f_{w(\gamma)} = \varepsilon(w)f_\gamma$ となるので $f = \sum_{\alpha\in C\cap P} f_\alpha J(e^\alpha)$ となる。

次に P 上の順序関係 $\alpha \geq \alpha'$ を $\alpha - \alpha' \in \mathbb{R}_{\geq 0}\Delta$ で定め、$x = \sum_{\gamma \in P} x_\gamma e^\gamma \in \mathbb{Q}[P]$ の項 $x_\gamma e^\gamma$ で γ が $\geq$ に関して極大なものを極大項と呼ぶことにする。この時 $\alpha \in C \cap P$ について $J(e^\alpha)$ の極大項は e^α だけである。実際、$\overline{C}$ が基本領域であることから任意の $w \neq e \in W$ について $w(\alpha) < \alpha$ となる。

ここで δ が交代式であることに注意する。実際、単純鏡映 s_β で負ルートに写される正ルートは $\beta \in \Delta$ だけであることから $s_\beta(\delta) = -\delta$ が分かり、これから任意の $w \in W$ について $w(f) = \varepsilon(w) f$ が従う。

よって $\delta = \sum_{\alpha \in C \cap P} \delta_\alpha J(e^\alpha)$ となる。一方で $\delta = e^\rho \prod_{\alpha \in \Pi}(1 - e^{-\alpha})$ だから δ の極大項は e^ρ だけである。これと $\rho \in C \cap P$ から $\delta = J(e^\rho)$ が分かる。 □

定理の証明. 定理の主張 (4.1) の左辺の分母は

$$\prod_{\alpha \in \Pi}(1 - e^{-w\alpha}) = e^{-w\rho} \prod_{\alpha \in \Pi}(e^{w\alpha/2} - e^{-w\alpha/2}) = \varepsilon(w) e^{-w\rho}\delta.$$

従って (4.1) の左辺は次のように書ける。

$$\delta^{-1} \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\rho} \prod_{\alpha \in \Pi}(1 - u_\alpha e^{-w\alpha}). \tag{4.3}$$

任意の部分集合 $E \subset \Pi$ に対し $\rho_E := \rho - \sum_{\alpha \in E} \alpha$ と定めると

$$e^{w\rho} \prod_{\alpha \in \Pi}(1 - u_\alpha e^{-w\alpha}) = \sum_{E \subset \Pi} e^{w\rho_E} \prod_{\alpha \in E}(-u_\alpha).$$

よって

$$\delta_E := \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\rho_E}.$$

とすれば

$$(4.3) = \delta^{-1} \sum_{E \subset \Pi} \delta_E \prod_{\alpha \in E}(-u_\alpha). \tag{4.4}$$

もし ρ_E がある $\alpha \in \Pi$ と垂直なら $s_\alpha \rho_E = \rho_E$ なので

$$\delta_E = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\rho_E} = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{ws_\alpha\rho_E} = \sum_{w' \in W} \varepsilon(w's_\alpha) e^{w'\rho_E} = \varepsilon(s_\alpha)\delta_E = -\delta_E,$$

即ち $\delta_E = 0$. 従って (4.4) においては ρ_E が任意の $\alpha \in \Pi$ と垂直でないような E のみ考えれば良い。実は

命題. 任意の $\alpha \in \Pi$ と ρ_E が垂直でない時、ある $w \in W$ が存在して $\rho_E = w\rho$ かつ $E = \Pi(w)$.

この命題を一度認めよう。$E = \Pi(w)$ なら $\Pi(w) = \Pi \cap w^{-1}(-\Pi)$ から

$$\rho_E = \rho_{\Pi(w)} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Pi \setminus \Pi(w)} \alpha - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Pi(w)} \alpha = w\rho.$$

これから $\delta_E = \varepsilon(w)\delta$ が分かる。すると

$$(4.4) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \prod_{\alpha \in \Pi(w)}(-u_\alpha) = \sum_{w \in W} \prod_{\alpha \in \Pi(w)} u_\alpha$$

となり定理の主張 (4.1) の右辺と一致する。よってあとは命題を証明すれば良い。 □

命題の証明. ρ_E は $\frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Pi} \varepsilon_\alpha \alpha$, $\varepsilon_\alpha \in \{\pm 1\}$ と書けるから、任意の $w \in W$ について $w^{-1}\rho_E$ も同じ形に書ける。従って $w^{-1}\rho_E = \rho - \varphi$, $\varphi =$ (互いに異なる正ルートの和) と書ける。

$C \subset V$ を W の基本領域の内部とし、$\beta \in \Delta$ に対し $\beta^\vee := 2\beta/(\beta, \beta)$ とする。

ρ_E はどの鏡映面にも含まれないから、ある $w \in W$ があって $w^{-1}\rho_E \in C$. よって任意の $\beta \in \Delta$ に対して $(w^{-1}\rho_E, \beta^\vee) > 0$. ここで $(\rho, \beta^\vee) = 1$ かつ $(\varphi, \beta^\vee) \in \mathbb{Z}$ だから $(\varphi, \beta^\vee) \leq 0$ となる。特に $(\varphi, \beta) \leq 0$.

一方で $\varphi = \sum_{\beta \in \Delta} c_\beta \beta$ と書くと $c_\beta \geq 0$ だから $(\varphi, \varphi) = \sum_{\beta \in \Delta} c_\beta(\varphi, \beta) \leq 0$. 従って $\varphi = 0$. つまり $\rho_E = w\rho$.

残る $E = \Pi(w)$ の証明のために、$F \subset \Pi$ に対し $S(F) := \sum_{\alpha \in F} \alpha$ と定める。$\rho_E = \rho - S(E)$, $w\rho = \rho - S(\Pi(w))$ だから次の主張を示せばよい。

主張. $E \subset \Pi$ が $S(E) = S(\Pi(w))$ を満たすなら $E = \Pi(w)$.

この主張を $\ell(w)$ に関する帰納法で示す。$\ell(w) = 0$ なら $w = e$ なので自明。$\ell(w) > 0$ として $w = w' s_\beta$, $\beta \in \Delta$, $\ell(w') = \ell(w) - 1$ とする。$\beta \notin \Pi(w)$ だから $\Pi(w) = s_\beta \Pi(w') \sqcup \{\beta\}$.

$\beta \in E$ なら $E' := s_\beta(E \setminus \{\beta\})$ は $E' \subset \Pi$ かつ

$$S(E') = s_\beta(S(E) - \beta) = s_\beta(S(\Pi(w)) - \beta) = s_\beta S(s_\beta \Pi(w')) = S(\Pi(w'))$$

だから、帰納法の仮定より $E' = \Pi(w')$. よって $E = s_\beta \Pi(w') \sqcup \{\beta\} = \Pi(w)$.

$\beta \notin E$ なら $E'' := s_\beta E \sqcup \{\beta\}$ は $E'' \subset \Pi$ かつ

$$S(E'') = \beta + s_\beta S(E) = \beta + s_\beta S(\Pi(w)) = \beta + s_\beta(s_\beta S(\Pi(w')) + \beta) = S(\Pi(w'))$$

だからやはり $E'' = \Pi(w')$. しかし $\beta \in E''$ かつ $\beta \notin \Pi(w')$ だからこの場合は起きえない。 □

参考文献

I. G. Macdonald, *The Poincaré series of a Coxeter group*, Math. Ann. **199**, 161–174 (1972).

以上です。