2017 年度前期 代数学 I/代数学概論 V　6 月 29 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

3　有限鏡映群の不変式

前回予告した定理「次数 = 指数 +1」の証明を §3.9 で与える。

$W = W(\Phi) \le O(V)$ を既約かつ本質的な有限鏡映群とする。n を W の階数、h を W の Coxeter 数とする。

3.8　Coxeter 数とルートの数

命題. $h = |\Phi|/n = 2N/n$. 但し N は正ルートの数。

証明. $n = 1$ なら $W = W(\mathrm{A}_1) = \mathfrak{S}_2$ なので $h = 2 = 2/1$ で成立。以下 $n > 1$ と仮定する。

§3.7 で構成した平面 $P \subset V$ を思い出そう。単純ルートおよび正ルートの集合 $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subset \Pi \subset \Phi$ を一つとって固定する。また $s_i := s_{\alpha_i}$ と略記する。必要なら Δ の番号を付け直して $s_1, \ldots, s_r$ が互いに可換かつ $s_{r+1}, \ldots, s_n$ も互いに可換となるようにする。また $\omega_1, \ldots, \omega_n \in V$ を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ の Euclid 内積 $(\cdot, \cdot)$ に関する双対基底とする。実対称行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $a_{ij} := (\alpha_i, \alpha_j)$ は正定値かつ $i \ne j$ なら $a_{ij} \le 0$ なので、§2.6 の命題より A の固有値 $c > 0$ とその固有ベクトル ${}^t(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ で $c_i > 0$ となるものがある。この時 P は

$$P := L + M \subset V, \quad L := \mathbb{R}\lambda,\ M := \mathbb{R}\mu, \quad \lambda := \textstyle\sum_{i=1}^r c_i\omega_i,\ \mu := \sum_{j=r+1}^n c_j\omega_j$$

で与えられた。Coxeter 元 $w = s_1 \cdots s_n$ の作用で P は不変であり、$w|_P$ は角度 $\pm 2\pi/h$ の回転になる。特に L と M の w 軌道 $O_{L,M} := \{w^k L, w^k M \mid k \in \mathbb{Z}\}$ は P 内の h 個の直線からなる。これらの直線を以下のように書く。

$$O_{L,M} = \{L_1 = L, L_2, \ldots, L_h = M\}.$$

主張. 各 $\alpha \in \Pi$ に対し整数 $1 \le k(\alpha) \le n$ があって $H_\alpha \cap P = L_{k(\alpha)}$.

実際、W の基本領域の内部 $C \subset V$ について $P \cap C = \{a\lambda + b\mu \mid a, b > 0\} \ne \emptyset$ だったので $H_\alpha \not\supset P$. よって $P \cap H_\alpha$ は直線。また $P \setminus \cup_{k=1}^h L_k$ の点は $P \cap C$ の点を w の作用で写したものだから、$P \cap H_\alpha$ と $P \setminus \cup_{k=1}^h L_k$ は交わらない。よって H_α は L_i 達のうちのどれか。

主張. 正ルート $\alpha \in \Pi$ について、$k(\alpha) = 1 \iff \alpha = \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n$.

まず $L_1 = L \subset Z = H_{r+1} \cap \cdots \cap H_n$ を思い出す。但し $H_j := H_{\alpha_j}$. よって $j = r+1, \ldots, n$ なら $k(\alpha_j) = 1$. 逆を示そう。$H_\alpha \cap P = L$ なら $\lambda \in L \subset H_\alpha$ だが、$\alpha = \sum_{k=1}^n b_k\alpha_k$, $b_k \ge 0$ と書くと

$$0 = (\lambda, \alpha) = (\textstyle\sum_{i=1}^r c_i\omega_i, \sum_{k=1}^n b_k\alpha_k) = \sum_{i=1}^r c_i b_i$$

なので、$c_i > 0$ より任意の $i = 1, \ldots, r$ について $b_i = 0$. よって $\alpha = \sum_{j=r+1}^n b_j\alpha_j$ と書けるが、s_j 達が可換なことから、このように書ける正ルート α は $\alpha_j (j = r+1, \ldots, n)$ しかない[*2]。

同様にして

主張. $k(\alpha) = h \iff \alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_r$.

以下 L を通る w 軌道を $O_L := \{w^k L \mid k \in \mathbb{Z}\}$ と書き、M についても同様に $O_M := \{w^k M \mid k \in \mathbb{Z}\}$ と書く。$O_{L,M} = O_L \cup O_M$ に注意する。上の主張から各 $L_k \in O_L$ について $H_\alpha \cap P = L_k$ となる $\alpha \in \Pi$ は $n - r$ 個だと分かる。また各 $L_k \in O_M$ について $H_\alpha \cap P = L_k$ となる $\alpha \in \Pi$ は r 個。

[*1] 2017/06/28 版, ver. 0.2.

[*2] この部分はレポート問題にします。

ところで h が偶数なら $O_L \sqcup O_M = O_{L,M}$ かつ $|O_L| = |O_M| = h/2$ であり、h が奇数なら $O_L = O_M = O_{L,M}$ である[*3]。よって h が偶数なら

$$|\{\alpha \in \Pi \mid H_\alpha \cap P \in O_L\}| = (n-r)h/2, \quad |\{\alpha \in \Pi \mid H_\alpha \cap P \in O_M\}| = rh/2.$$

特に $|\Pi| = (n-r)h/2 + rh/2 = nh/2$. これから結論を得る。$h$ が奇数でも

$$|\{\alpha \in \Pi \mid H_\alpha \cap P \in O_L\}| = (n-r)h, \quad |\{\alpha \in \Pi \mid H_\alpha \cap P \in O_M\}| = rh$$

となるが $O_L = O_M$ よりこの 2 つの集合はともに Π に一致する。特に $r = h/2$. よって同じ結論を得る。 □

系. 有限鏡映群の Coxeter 数は以下の表のようになる。

	A_n	B_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2	H_3	H_4	$\mathrm{I}_2(m)$
$\|W\|$	$(n+1)!$	$2^n n!$	$2^{n-1}n!$	$2^7 3^4 5$	$2^{10}3^4 5 7$	$2^{14}3^5 5^2 7$	$2^7 3^2$	12	120	14400	$2m$
$\|\Phi\|$	$n(n+1)$	$2n^2$	$2n(n-1)$	72	126	240	48	12	30	120	$2m$
h	$n+1$	$2n$	$2(n-1)$	12	18	30	12	6	10	30	m

表 1　有限鏡映群の位数、ルートの数、Coxeter 数

系. $\{m_i\}_{i=1}^n$ を W の指数、$\{d_i\}_{i=1}^n$ を W の次数とすると

$$\sum_{i=1}^n m_i = N = \sum_{i=1}^n (d_i - 1).$$

系. $h = 2 \iff N = n = 1 \iff W = W(\mathrm{A}_1)$. 特に $W \neq W(\mathrm{A}_1)$ なら原始 h 乗根 ζ_h (Coxeter 元の固有値の一つ) は虚数。

3.9 次数と指数

以下 $\{m_i\}_{i=1}^n$ を W の指数、$\{d_i\}_{i=1}^n$ を W の次数とする。

定理. $\{d_i\}_{i=1}^n = \{m_i + 1\}_{i=1}^n$. 特に $|W| = \prod_{i=1}^n (m_i + 1)$.

証明のために次の命題を準備する。

命題. $f_1, \ldots, f_n \in R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^W$ を W の基本不変式、$J := \det(\partial f_i/\partial x_j)_{i,j=1}^n$ をその Jacobian とする。
(1) $\deg J = \sum_{i=1}^n (d_i - 1) = N := |\Phi|/2$.
(2) 各 $\alpha \in \Phi$ に対し $l_\alpha \in S = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ を $\{x \in V \mid l_\alpha(x) = 0\} = H_\alpha$ となる 1 次式とする (l_α は定数倍を除いて一意に定まる)。この時ある $k \in \mathbb{R}$ があって

$$J = k \prod_{\alpha \in \Pi} l_\alpha.$$

証明. (1) Jacobian 判定法 (§3.5 の事実) を思い出すと、$f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ が代数的に独立なので $J \neq 0$. 一方で J は行列式だから、$\pm \prod_{i=1}^n \partial f_i/\partial x_{\pi(i)}$ の $\pi \in \mathfrak{S}_n$ に関する和。これらの単項式の次数はどれも $\sum_{i=1}^n (d_i - 1) = N$ だから、$J \neq 0$ 全体も N 次式である。
(2) $\varphi(x) := (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ で写像 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を定義する。この時 H_α 上で $J = 0$. 実際、もし $a \in H_\alpha$ で $J(a) \neq 0$ なら逆関数定理から φ は a の近傍で単射だが、a の近傍の点 b であって $b \notin H_\alpha$ なるものについて $b \neq s_\alpha(b)$ かつ $\varphi(b) = \varphi(s_\alpha(b))$ となり矛盾。Hilbert の零点定理より J は l_α で割り切れる[*4]。よって $\prod_{\alpha \in \Pi} l_\alpha$ で J は割り切れる。(1) より J が N 次式だから結論を得る。 □

*3 この部分もレポート問題にします。
*4 この部分はレポート問題にします。

定理の証明. $n > 1$ と仮定してよい。Coxeter 元 $w = s_1 \cdots s_n \in W$ を 1 つ固定する。

$V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ とし、w の固有ベクトルからなる $V_{\mathbb{C}}$ の基底 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ を取る。必要なら λ_i 達の番号を付けかえて $w\lambda_i = \lambda_i \zeta_h^{m_i}$ だとする。特に $m_1 = 1$ より λ_1 の固有値は ζ_h. $n > 1$ だから §3.8 の系より $\zeta_h \notin \mathbb{R}$.

この時任意の $\alpha \in \Phi$ について $\lambda_1 \notin H_\alpha$ である。実際、$P = \mathbb{R}\lambda + \mathbb{R}\mu \subset V$ を §3.8 もしくは §3.10 の平面とし $P_{\mathbb{C}} := P \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \subset V_{\mathbb{C}}$ とすれば、λ_1 は固有値 $\zeta_h \notin \mathbb{R}$ の固有ベクトルなので $\lambda_1 \in P_{\mathbb{C}} \setminus P$. もし $(\lambda_1, \alpha) = 0$ なら複素共役を取って $(\overline{\lambda_1}, \alpha) = 0$ だから $\mathbb{C}\lambda_1 + \mathbb{C}\overline{\lambda_1} = P_{\mathbb{C}} \subset H_\alpha$ となるが、これは P が基本領域の内部 C の点を含むことと矛盾する。

λ_i と双対な V^* の元を y_i と書くと、$\{y_1, \dots, y_n\}$ は V^* の基底で $S = S(V^*) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$ となっている。$f_1, \dots, f_n$ の Jacobian は x の微分で定義しても、あるいは y の微分で定義しても (0 でない) 定数倍を除いて等しい。そこで以下 $J(y) := \det(\partial f_i / \partial y_j)$ を考える。

上の命題より $J(y)$ の零点集合は $\cup_{\alpha \in \Pi} H_\alpha$ で与えられる。$\lambda_1 \notin \cup_{\alpha \in \Pi} H_\alpha$ なので $J(1, 0, \dots, 0) \neq 0$. 必要なら f_i 達の添え字を付け替えることで、全ての i について $\frac{\partial f_i}{\partial y_i}(1, 0, \dots, 0) \neq 0$ と仮定できる。つまり

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_i} = a_i y_1^{d_i - 1} + (y_2, \dots, y_n \text{ を含む項達}), \quad a_i \neq 0$$

が任意の $i = 1, \dots, n$ について成立する。よって

$$f_i = a_i y_1^{d_i - 1} y_i + \cdots .$$

両辺に w を作用させると、$wf_i = f_i$ 及び $wy_i = y_i \zeta_h^{-m_i}$ より

$$f_i = a_i \zeta_h^{1 - d_i - m_i} y_1^{d_i - 1} y_i + \cdots .$$

よって $\zeta_h^{1 - d_i - m_i} = 1$. これから $d_i - 1 \equiv h - m_i \pmod h$.

ところで §3.7 の補題より $\{h - m_i\}_{i=1}^n = \{m_i\}_{i=1}^n$ だから、§3.8 の系とあわせて $\sum_{i=1}^n (h - m_i) = \sum_{i=1}^n (d_i - 1)$. すると $d_i - 1 \equiv h - m_i \pmod h$ と $0 < m_i < h$ から $d_i - 1 = h - m_i$. これで前半の主張が得られる。

後半の主張は以前示した $\prod_{i=1}^n d_i = |W|$ と前半から従う。 □

3.10 Weyl 群の次数と指数

Weyl 群についてはより強い主張が性質する。

命題. W を既約 Weyl 群とし h をその Coxeter 数とする。$1 \leq m \leq h - 1$ が h と互いに素なら m は W の指数。

証明. W がルート格子 $\mathbb{Z}\Phi$ を保つので、単純ルートからなる V の基底に関する Coxeter 元 w の表現行列は整数成分である。従って w の特性多項式 $\det(xI - w)$ は整数係数。一方原始 h 乗根 ζ_h について、$\{\zeta_h^m \mid (m, h) = 1,\ 1 \leq m \leq h - 1\}$ は相違なる h 乗根全体の集合であり、それらを根とする円分多項式 $\Phi_h(x) = \prod_{(m,h)=1} (x - \zeta_h^m)$ は整数係数の既約多項式である。ζ_h は w の固有値だから $\Phi_h(x)$ は $\det(xI - w)$ を割り切る。よって $(m, h) = 1$ なら ζ_h^m は w の固有値。 □

この時点で Weyl 群の指数を決定することができる。結果は表 2 の通り。

- $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{D}_n$ 型については、§3.5 及び 6/15 のレポート問題の基本不変式の構成から次数が分かって、それと §3.11 の定理から指数が分かる。
- $\mathrm{G}_2 = \mathrm{I}_2(6)$ 型については二面体群の記述から直ぐにわかる。一般に $\mathrm{I}_2(m)$ 型の指数は $1, m - 1$ である。
- F_4 型については、上の命題から 12 と互いに素な $1, 5, 7, 11$ が指数だと分かるが、ちょうど階数個あるのでこれで全部である。
- E_8 型は $h = 30$ で、1 以上 29 以下の互いに素な整数は $1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ の 8 個でちょうど階数個ある。よってこれで指数が決定した。
- E_7 型は $h = 18$ で、互いに素なものは $1, 5, 7, 11, 13, 17$ の 6 つ。1 つ足りないが、$\{h - m_i\} = \{m_i\}$ を思い出すと $9 = 18 - 9$ が求める指数である。

- E_6 型は $h=12$ で、互いに素な $1,5,7,11$ は指数。2 つ足りないが、残りは $\sum m_i = N = 36$ と $\prod(m_i+1) = |W| = 2^7 3^4 5$ から 4 と 8 だと決定する。

type	$m_1,\dots,m_n$
A_n	$1,2,\dots,n$
B_n	$1,3,5,\dots,2n-1$
D_n	$1,3,5,\dots,2n-3,n-1$
E_6	$1,4,5,7,8,11$
E_7	$1,5,7,9,11,13,17$
E_8	$1,7,11,13,17,19,23,29$
F_4	$1,5,7,11$
G_2	$1,5$

表 2　Weyl 群の指数

実は更に次の結果が成立する。

定理. Weyl 群 W の指数を $m_n = h-1 \geq \cdots \geq m_1 = 1$ と並べて N の分割とみなし、その (対応する Young 図形の意味で) 転置の分割を $k_1 \geq \cdots \geq k_{h-1} = 1$ と書くと、k_i は高さ i の正ルートの数と一致する。

証明は幾つか知られているが、Poincaré 多項式の因数分解定理の系としても得られる。詳しくは Humphreys の §3.20 を参照せよ。

参考文献

James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge の §3.13, §3.19, §3.20.

以上です。