2017 年度前期 代数学 I/代数学概論 V　6 月 22 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

3　有限鏡映群の不変式

有限鏡映群 $W = W(\Phi) \le O(V)$ は既約かつ本質的と仮定する。つまり対応する Coxeter グラフ $\Gamma(W, \Delta)$ が連結で、かつ V の W 固定点が存在しない ($V^W = \emptyset$) と仮定する。

この時 W の次数は Coxeter 元と呼ばれる特別な元の固有値から計算できることを説明する。

以下 n を W の階数、つまり単純ルート集合 $\Delta \subset \Phi$ の濃度とする。

3.6　Coxeter 元、Coxeter 数、指数

定義. W のルート系 Φ とその単純ルート集合 $\Delta \subset \Phi$ を固定する。また Δ の元の番号付け $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ も固定する。$s_i = s_{\alpha_i} \in W$ を対応する単純鏡映とする。この状況で

$$s_1 s_2 \cdots s_n \in W$$

を (考えている Δ とその番号付けに関する) **Coxeter 元** (Coxeter element) と呼ぶ。

命題. 任意の Coxeter 元は W 共役である。

証明. 任意の単純ルート集合は W 共役なので、集合 $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ は固定して、2 つの番号付けに対応する 2 つの Coxeter 元が W 共役であることを示せばよい。

番号付けの巡回置換が Coxeter 元の共役に対応することは

$$s_n s_1 \cdots s_{n-1} = s_n (s_1 \cdots s_n) s_n^{-1}$$

から分かる。また $s_i s_{i+1} = s_{i+1} s_i$ なら番号付けの隣接互換 $(i, i+1)$ で Coxeter 元が不変であることも明らか。そこで番号付けの任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ がこの 2 種類の置換の合成で書けることを言えば十分。

$n = 1, 2$ なら自明。$n > 2$ と仮定する。必要なら予め巡回置換を施して、s_n に対応する Coxeter グラフの頂点が端の頂点、即ち 1 つの辺で他の頂点 s_j だけと結ばれていると仮定してよい。任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を考える。$j \ne n-1$ なら $\mathfrak{S}_n = \langle (1, 2, \ldots, n), (n-1, n) \rangle$ が成り立つことから結論が成立する。$j = n-1$ なら $\mathfrak{S}_n = \langle (1, 2, \ldots, n), (1, n) \rangle$ を使えばよい。 □

定義. Coxeter 元の位数を W の **Coxeter 数** (Coxeter number) と呼び h と書く。

例. (1) 2 面体群 $\mathcal{D}_m = W(\mathrm{I}_2(m)) = \langle \alpha, \beta \rangle$ の Coxeter 数は $s_\alpha s_\beta$ が $\pm 2\pi/m$ 回転であることから $h = m$.
(2) 対称群 $\mathfrak{S}_{n+1} = W(\mathrm{A}_n)$ の Coxeter 数は

$$s_1 s_2 \cdots s_n = (1,2)(2,3)\cdots(n, n+1) = (1, 2, \ldots, n+1)$$

から $h = n + 1$.

定義. h を W の Coxeter 数、ζ_h を 1 の原始 h 乗根とする。Coxeter 元の固有値を

$$\zeta_h^{m_i}, \quad 0 \le m_1 \le \cdots \le m_n < h$$

と書いたときの m_i 達を W の**指数** (exponents) と呼ぶ。

[*1] 2017/06/21 版, ver. 0.3.

例. $\mathfrak{S}_{n+1} = W(\mathrm{A}_n)$ の Coxeter 元は置換行列 $P = (p_{ij}) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{n+1})$, $p_{ij} = \delta_{j-i,1} + \delta_{i-j,n}$ に対応する。その固有値は $\det(tI_{n+1} - P) = t^{n+1} - 1 = 0$ より ζ_{n+1}^i $(i = 0, \ldots, n)$. 最後に $W(\mathrm{A}_n) \leq O(V)$, $V \subsetneq \mathbb{R}^{n+1}$ に注意して、$W(\mathrm{A}_n)$ の指数は $1, 2, \ldots, n$.

$W(\mathrm{A}_n)$ の次数は $2, 3, \ldots, n+1$ であった。実は一般に次の定理が成立する。証明は次回与える。

定理. 既約かつ本質的な有限鏡映群 $W \leq O(V)$ の次数 $d_1, \ldots, d_n$ と指数 $m_1, \ldots, m_n$ について $d_i = m_i + 1$.

3.7 指数の性質

以下 W の Coxeter 元を $w = s_1 \cdots s_n$ と書く。

補題. w の固有値に 1 は現れない。特に全ての指数 m_i は正。また $\{h - m_i\}_{i=1}^n = \{m_i\}_{i=1}^n$ である。従って $\sum_{i=1}^n m_i = nh/2$.

証明. $wv = v$ なる $v \in V$ について $s_2 \cdots s_n v = s_1 v$. しかし

$$s_2 \cdots s_n v \equiv v \pmod{\mathbb{R}\alpha_2 + \cdots + \mathbb{R}\alpha_n}, \quad s_1 v \equiv v \pmod{\mathbb{R}\alpha_1}$$

及び α_i 達が線形独立であることから $s_2 \cdots s_n v = v = s_1 v$. 特に $(v, \alpha_1) = 0$. この議論を繰り返して任意の $i = 1, \ldots, n$ について $(v, \alpha_i) = 0$ が言えるので $v = 0$.

後半について、w は $\mathbb{R}$ 上の線形変換だから虚数の固有値はその複素共役と対で現れる。1 が固有値でないことは分かっていて、また $-1 = \zeta_h^{h/2} = \zeta_h^{h-h/2}$ だから、$\{h - m_i\}_{i=1}^n$ は $\{m_i\}_{i=1}^n$ の置換だと分かる。 □

命題. W の指数 $m_1, \ldots, m_n$ について $m_1 = 1$ かつ $m_n = h - 1$.

この命題の証明にはいくつか準備が必要である。最初にある特別な平面 $P \subset V$ を用意する。

P の構成. まず単純ルートを適宜番号付けして、$s_1, \ldots, s_r$ が互いに可換かつ $s_{r+1}, \ldots, s_n$ も互いに可換となるようにする。これは Coxeter グラフ $\Gamma(W, \Delta)$ の頂点集合を 2 色に色分けして、どの隣接頂点の対も別々の色にすることと同値であるが、考えているグラフが木 (tree graph) なのでいつでも可能である。

$y, z \in W$ を $y := s_1 \cdots s_r$, $z := s_{r+1} \cdots s_n$ で定めれば $yz = w$ かつ $y^2 = z^2 = e$.

$\omega_1, \ldots, \omega_n \in V$ を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ の Euclid 内積 $(\cdot, \cdot)$ に関する双対基底とする。また必要ならスカラー倍して、任意の $k = 1, \ldots, n$ に対し $(\alpha_k, \alpha_k) = 1$ と仮定する。V の部分空間 Y, Z を

$$Y := \mathbb{R}\omega_{r+1} + \cdots + \mathbb{R}\omega_n, \quad Z := \mathbb{R}\omega_1 + \cdots + \mathbb{R}\omega_r$$

で定める。また $H_i = H_{\alpha_i}$ を α_i に垂直な超平面とすると次が成立する*2。

$$Y = H_1 \cap \cdots \cap H_r, \quad Z = H_{r+1} \cap \cdots \cap H_n$$

これから $y|_Y = \mathrm{id}_Y$ 及び $y|_{Y^\perp} = -\mathrm{id}_{Y^\perp}$ ($Y^\perp$ は Y の直交補空間) が分かる。同様に $z|_Z = \mathrm{id}_Z$, $z|_{Z^\perp} = -\mathrm{id}_{Z^\perp}$.

次に行列*3 $A = (a_{kl})_{k,l=1}^n$, $a_{kl} := (\alpha_k, \alpha_l)$ を考える。$\alpha_l = \sum_{k=1}^n \omega_k a_{kl}$ となること*4に注意する。A は非対角成分が 0 以下の正定値行列だから、§2.6 の命題*5より A の固有値 $c > 0$ があって対応する固有ベクトル ${}^t(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ の成分 c_i は全て正。

以上の準備のもと P を次のように定める。

$$P := \mathbb{R}\lambda + \mathbb{R}\mu \subset V, \quad \lambda := \sum_{i=1}^r c_i \omega_i \in Z, \quad \mu := \sum_{j=r+1}^n c_j \omega_j \in Y.$$

□

---

*2 このことの証明はレポート問題にします。
*3 Weyl 群の場合は所謂 Cartan 行列です。
*4 このことの証明はレポート問題にします。
*5 5/18 の講義ノート参照。

主張. (1) w の作用は P を保ち、P 上に制限すると回転になる。
(2) $w|_P$ の位数は w の位数、即ち W の Coxeter 数 h に等しい。つまり $w|_P$ は $\pm 2\pi/h$ 回転である。

命題の証明. $w|_P$ が $\pm 2\pi/h$ 回転なので 1 の原始 h 乗根 ζ_h は確かに w の固有値。これと補題の結果 $m_1 > 0$ から $m_1 = 1$. また w は $\mathbb{R}$ 上の線形変換だから ζ_h の複素共役、即ち ζ_h^{n-1} も固有値である。よって $m_n = n-1$. □

主張 (1) の証明. $\alpha_l = \sum_k \omega_k a_{kl}$ と固有値 c の取り方から $\sum_{l=1}^n \alpha_l c_l = c\sum_{k=1}^n \omega_k c_k$. この式と α_i $(i = 1, \ldots, r)$ の内積を取ると、$1 \le i, l \le r$ で $a_{il} = \delta_{i,l}$ である[*6]から $c_i + \sum_{j=r+1}^n a_{ij} c_j = cc_i$. すると

$$(c-1)\lambda = (c-1)\sum_{i=1}^r \omega_i c_i = \sum_{i=1}^r \omega_i \sum_{j=r+1}^n a_{ij} c_j = \sum_{j=r+1}^n c_j \sum_{i=1}^r \omega_i a_{ij} = \sum_{j=r+1}^n c_j \Big(-a_{jj}\omega_j + \sum_{k=1}^n \omega_k a_{kj}\Big)$$
$$= -\sum_{j=r+1}^n c_j \omega_j + \sum_{j=r+1}^n c_j \alpha_j = -\mu + \nu.$$

但し $\nu := \sum_{j=r+1}^n c_j \alpha_j$. 4 番目の等式では $a_{kj} = 0$ $(k \ge r+1,\ k \ne j)$ 及び $a_{jj} = 1$ を使った。この計算と $\nu \in Z^\perp$ から $(c-1)\lambda + \mu \in Z^\perp$. つまりこの元は z の作用で -1 倍される。一方 $\lambda \in Z$ だから平面 P は z の作用で保たれる。そして $z|_P$ は直線 $\mathbb{R}\lambda$ に関する鏡映である。

同様の計算で $(c-1)\mu + \lambda \in Y^\perp$ となる[*7]ことから、平面 P は y の作用で保たれ、$y|_P$ は直線 $\mathbb{R}\mu$ に関する鏡映だと分かる。従って $w = yz$ は P を保ち、$w|_P$ は回転だと分かる。 □

主張 (2) の証明のために、§2.10 で扱った W の基本領域 D を思い出しておく。

事実 (§2.10 の定理及びその系)**.** 有限鏡映群 $W = W(\Phi) \le O(V)$ の単純ルート集合 $\Delta \subset \Phi$ を固定する。$C \subset D \subset V$ を次のように定める。

$$C := \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha) > 0\ \forall \alpha \in \Delta\}, \quad D := \overline{C} = \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha) \ge 0\ \forall \alpha \in \Delta\}.$$

すると D は V の W 作用に関する基本領域である。即ち
(1) 任意の $\lambda \in V$ はある $\mu \in D$ と W 共役。　(2) $w \in W$ と $\lambda, \mu \in D$ について、$w\lambda = \mu$ ならば $\lambda = \mu$.
更に $\lambda, \mu \in D$ について $w\lambda = \mu$ なら $\lambda = \mu$ かつ w は λ を固定する単純鏡映の積。特に $\lambda \in C$ ならその固定化群 $\{w \in W \mid w\lambda = \lambda\}$ は自明。

主張 (2) の証明. $c_k > 0$ より $\lambda = \sum_{i=1}^r c_i \omega_i$ 及び $\mu = \sum_{j=r+1}^n c_j \omega_j$ は基本領域 D に含まれている。すると平面 $P = \mathbb{R}\lambda + \mathbb{R}\mu$ と C の交叉は $P \cap C = \{a\lambda + b\mu \mid a, b > 0\}$ となって特に空ではない。従ってもし $(w|_P)^m = \mathrm{id}_P$, 即ち w^m が P の各点を保つなら、$P \cap C$ のある元も保つことになる。すると上の事実から $w^m = e$. よって $w|_P$ の位数は w の位数に等しい。 □

参考文献

James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge の §1.12, §3.16, §3.17.

以上です。

[*6] このことの証明はレポート問題にします。
[*7] ここもレポート問題にします