

2017 年度前期 代数学 I/代数学概論 V 6 月 15 日分レポート問題^{*1}

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

レポート問題

レポートの提出期限は (今学期中という自明な期限は除いて) 特に設けません。解けたら提出して下さい。
講義で分からなかった所、扱ってほしい話題などありましたらレポートに書いて下さい。
ここに挙げた問題以外でも、関連する話題についてレポートにしてくださっても構いません。

レポート問題 1 (5 点). Euclid 空間 V 上での -1 倍作用素を i とかく。有限鏡映群 $W \subset O(V)$ について、 $i \in W$ であることと W の次数が全て偶数であることが同値であることを示せ。

レポート問題 2 (5 点). §3.4 の定理 $d_1 d_2 \cdots d_n = |W|$, $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = N + n$ を A_n 型有限鏡映群の場合に確かめよ。

レポート問題 3 (5 点). §3.5 の命題の証明で「 g_1, \dots, g_k は f_1, \dots, f_{k-1} の多項式で書ける」とあるところを説明せよ。

レポート問題 4 (10 点). §3.5 の事実 (Jacobian 判定法) の証明を与えよ。

レポート問題 5 (5 点). B_n 型有限鏡映群 W は $S(V^*) = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ に x_i 達の置換及び符号変換で作用する。 W の基本不変式の組として

$$f_i := x_1^{2i} + \cdots + x_n^{2i} \quad (1 \leq i \leq n)$$

が取れることを示せ。(Jacobian は $2^n n! x_1 \cdots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j^2 - x_i^2)$ になる。)

レポート問題 6 (5 点). D_n 型有限鏡映群 W は $S(V^*) = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ に x_i 達の置換及び偶数個の符号変換で作用する。 W の基本不変式の組として

$$f_i := x_1^{2i} + \cdots + x_n^{2i} \quad (1 \leq i \leq n-1), \quad f_n := x_1 \cdots x_n$$

が取れることを示せ。(Jacobian は $(-2)^{n-1} (n-1)! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j^2 - x_i^2)$ になる。)

出典について

問題 1 は Humphreys, “Reflection Groups and Coxeter Groups”, §3.7 の Exercise より引用しました。問題 5 と 6 は §3.12 の本文から引用しました。

講義の webpage

この講義の webpage を以下のアドレスに作りました。配布物や講義ノート、予定を掲載しています。
<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2017S-AlgI.html>

以上です。

^{*1} 2017/06/12 版, ver. 0.2.