2017 年度前期 代数学 I/代数学概論 V　6 月 15 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

3　有限鏡映群の不変式

$W \leq O(V)$ を有限鏡映群とし $S := S(V^*)$, $R := S^W$ とする。R を不変式環と呼ぶのであった。

3.2　Chevalley の定理

Chevalley の定理の証明で残っていた、次の補題を証明する。

補題. $h_1, \dots, h_m \in R$ に対し $J := (h_2, \dots, h_m) \subset R$ を R のイデアルとする。$h_1 \notin J$ かつ

$$h_1 p_1 + \cdots + h_m p_m = 0 \tag{3.1}$$

なる $p_1, \dots, p_m \in S$ が存在すると仮定する。この時 $p_1 \in I = SR^+$.

補題の証明. まず h_1 が $h_2, \dots, h_m$ の生成する S のイデアルに含まれないことに注意する。実際、もし含まれていれば $h_1 = h_2 g_2 + \cdots + h_m g_m$ となる $g_i \in S$ があるが、Raynolds 作用素 $\rho(r) := \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} w \cdot r$ をあてると $h_1 = h_2 \rho(g_2) + \cdots + h_m \rho(g_m)$ となって、$\rho(g_i) \in R$ より $h_1 \in J$ となり矛盾する。

$p_1 \in I$ を $\deg p_1$ に関する帰納法で示す。$\deg p_1 = 0$ の時は $p_1 = 0$ となって自明なので $\deg p_1 > 0$ と仮定する。

$s = s_\alpha \in W$ を鏡映とすると、$s \cdot p_i - p_i$ は超平面 $H_\alpha \subset V$ 上で 0. 従って H_α を定義する 1 次式を $l \in S$ とすれば

$$s \cdot p_i - p_i = l q_i \quad (q_i \in S) \tag{3.2}$$

となる。ここで (3.1) の両辺に s を作用させて $h_1(s \cdot p_1) + \cdots + h_r(s \cdot p_r) = 0$. この式と (3.1) の差を取り、(3.2) を代入して整理すると $l(h_1 q_1 + \cdots + h_r q_r) = 0$. $l \neq 0$ だから

$$h_1 q_1 + \cdots + h_r q_r = 0.$$

ここで (3.2) の左辺は $\deg p_i$ の斉次元だから、q_i も斉次元で $\deg q_i < \deg p_i$. 特に $\deg q_1 < \deg p_1$ なので帰納法の仮定が使えて $q_1 \in I$. 再び (3.2) より $s \cdot p_1 \equiv p_1 \pmod{I}$.

これまでの議論で $s = s_\alpha \in W$ は任意に取った。鏡映で W は生成されるので、任意の $w \in W$ について $w \cdot p_1 \equiv p_1 \pmod{I}$. よって Raynolds 作用素 $\rho(p_1) = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} w \cdot p_1$ について $\rho(p_1) \equiv p_1 \pmod{I}$. これと $\rho(p_1) \in R^+$ より $p_1 \in I$. □

注意. Chevalley の定理の証明で W が鏡映群であることを使っているのは最後の補題の所のみである。

注意. Chevalley の定理の逆と見なせる、次の **Shephard-Todd の定理**が成立する。

「V を Euclid 空間、G を $\mathrm{GL}(V)$ の有限部分群とする。$S = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ の G 不変部分環 S^G が n 個の代数的に独立な斉次多項式で生成されると仮定する。この時 G はそれに含まれる (V の) 鏡映で生成される。特に G は有限鏡映群である。」

この講義では Shephard-Todd の定理は証明しない。Humphreys の §3.11 もしくは次の日本語のテキストに証明が与えられている。

堀田、渡辺、庄司、三町「群論の進化」朝倉書店 (2004 年)
第 2 章 有限群の不変式論 (渡辺敬一) §2.5.

[*1] 2017/06/15 版, ver. 0.4.

3.3 基本不変式の次数

例. A 型有限鏡映群、即ち対称群 $W = \mathfrak{S}_n$ の不変式環を考える。$\mathfrak{S}_n \leq O(\mathbb{R}^n)$ と思うと、$R = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ は対称多項式のなす環に他ならない。その (斉次な) 生成元の取り方として以下のものが古典的に知られている。どの生成系についても次数の集合は $\{1, \ldots, n\}$ になることに注意する。

基本対称多項式 (elementary symmetric polynomials):

$$e_1 := \textstyle\sum_{1\leq i\leq n} x_i,\ e_2 := \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j,\ \ldots,\ e_n := x_1 \cdots x_n.$$

完全対称多項式 (complete symmetric polynomials):

$$h_1 := \textstyle\sum_{1\leq i\leq n} x_i,\ h_2 := \sum_{1\leq i\leq j\leq n} x_i x_j,\ \ldots,\ h_n := \sum_{1\leq i_1\leq\cdots\leq i_n\leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$$

冪和対称多項式 (power sum symmetric polynomials):

$$p_1 := \textstyle\sum_{1\leq i\leq n} x_i,\ p_2 := \sum_{1\leq i\leq n} x_i^2,\ \ldots,\ p_n := \sum_{1\leq i\leq n} x_i^n$$

命題. $f_1, \ldots, f_n$ 及び $g_1, \ldots, g_n$ を各々 R の代数的独立で斉次な生成元とする。$d_i := \deg f_i$, $e_i := \deg g_i$ とおく。すると $\{d_1, \ldots, d_n\} = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

証明. 各 f_i は $g_1, \ldots, g_n$ の多項式で書けて、また各 g_j も $f_1, \ldots, f_n$ の多項式で書ける。従って偏微分 $\partial f_i/\partial f_j = \delta_{i,j}$ は $\sum_{k=1}^n (\partial f_i/\partial g_k)(\partial g_k/\partial f_j) = \delta_{i,j}$ と書き直せて、これから行列 $(\partial f_i/\partial g_j)_{i,j}$ 及び $(\partial g_i/\partial f_j)_{i,j}$ は互いの逆行列になる。特に $\det(\partial f_i/\partial g_j)_{i,j} \neq 0$. これは行列式を展開した時少なくとも 1 つの項が 0 でないことを意味するから、ある置換 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ があって $\prod_{i=1}^n \partial f_i/\partial g_{\pi(i)} \neq 0$. 特に各 f_i を $g_1, \ldots, g_n$ の多項式で書いた時 $g_{\pi(i)}$ が必ず現れる。すると次数を比較して $d_i \geq e_{\pi(i)}$ が任意の i について成立する。

最後に得られた不等式を i に関して和をとると、π が置換であることに注意して $\sum_{i=1}^n d_i \geq \sum_{i=1}^n e_i$. 同様の議論を $(\partial g_i/\partial f_j)_{i,j}$ に適用して $\sum_{i=1}^n e_i \geq \sum_{i=1}^n d_i$ となるので $\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n e_i$. よって任意の i について $d_i = e_{\pi(i)}$. □

定義. 有限鏡映群 W の**次数** (degrees) とは不変式環 $R = S(V^*)^W$ の生成元の次数 $d_1, \ldots, d_n$ のこと。

注意. $S = S(V^*) = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ と書くと、$W \leq O(V)$ より $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \in R = S^W$ である。実はこれから 2 がいつも W の次数に現れることが分かる。

3.4 次数の性質

$W \leq O(V)$ を有限鏡映群とする。$V_{\mathbb{C}}$ を線形空間 V の複素化とすると各 $w \in W$ は $w \in \mathrm{GL}(V_{\mathbb{C}})$ とみなせる。t を不定元として

$$\det(1 - tw) = (1 - c_1 t) \cdots (1 - c_n t)$$

と $\det(1 - tw)$ を因数分解すれば、$c_i \in \mathbb{C}$ は w の固有値である。

命題. $d_1, \ldots, d_n$ を W の次数とすると、形式冪級数環 $\mathbb{C}[[t]]$ で次の等式が成立する。

$$\frac{1}{|W|} \sum_{w\in W} \frac{1}{\det(1 - tw)} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - t^{d_i}}.$$

証明. ひとまず $w \in W$ を固定する。$S \simeq \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ の複素化を $S_{\mathbb{C}} = S(V_{\mathbb{C}}^*) \simeq \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ と書く。つまり z_i 達は $V_{\mathbb{C}}^*$ の基底である。各 z_i は w の固有ベクトルだと仮定できる。その固有値を c_i とする。示すべき等式の左辺の $1/\det(1 - tw)$ は次のように展開できる。

$$\frac{1}{\det(1 - tw)} = \frac{1}{1 - c_1 t} \cdots \frac{1}{1 - c_n t} = \sum_{k\geq 0} t^k \sum_{k_1+\cdots+k_n=k} c_1^{k_1} \cdots c_n^{k_n}.$$

各 $c_1^{k_1}\cdots c_n^{k_n}$ は $z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}\in S_{\mathbb{C}}$ の w 固有値である。よって $S_{\mathbb{C},k}\subset S_{\mathbb{C}}$ を k 次斉次部分とすれば

$$\sum_{k_1+\cdots+k_n=k} c_1^{k_1}\cdots c_n^{k_n}=\operatorname{tr}_{S_{\mathbb{C},k}} w.$$

ここで次の補題に注意する。

補題. G を有限群、E を標数 0 の体上の有限次元 G 表現とする。この時 G 不変部分 $E^G\subset E$ の次元は

$$\dim E^G=\operatorname{tr}_E p,\quad p:=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g.$$

補題の証明は後回しにする。これから

$$\frac{1}{|W|}\sum_{k_1+\cdots+k_n=k} c_1^{k_1}\cdots c_n^{k_n}=\dim S^W_{\mathbb{C},k}. \tag{3.3}$$

一方 $S^W=\mathbb{R}[f_1,\dots,f_n]$ と不変式環の生成元を取ると $S^W_{\mathbb{C},k}=\mathbb{C}[f_1,\dots,f_n]$ となるので、$\{f_1^{e_1}\cdots f_n^{e_n}\mid \sum e_i\deg f_i=k\}$ は $S^W_{\mathbb{C},k}$ の基底である。すると $\dim S^W_{\mathbb{C},k}$ の母関数が

$$\sum_{k\geq 0} t^k\dim S^W_{\mathbb{C},k}=\prod_{i=1}^n\frac{1}{1-t^{d_i}} \tag{3.4}$$

となることが分かる。式 (3.3) と (3.4) より結論を得る。 □

補題の証明. 任意の $g\in G$ に対し $gp=p$ なので $p^2=p$. よって p の最小多項式は x^2-x. 従って p は対角化可能で固有値は 0 と 1. $E=E_0\oplus E_1$ を固有分解とすると $\operatorname{tr}_E p=\dim E_1$. よって $E_1=E^G$ を示せばよい。$e\in E_1$ なら任意の $g\in G$ に対して $e=p\cdot e=gp\cdot e=g\cdot e$ なので $E_1\subset E^G$. 逆に $e\in E^G$ なら $p\cdot e=e$ が分かるので $E^G\subset E_1$. □

この命題の応用として

定理. $d_1,\dots,d_n$ を W の次数とし、N を W に含まれる鏡映の数とすると

$$d_1d_2\cdots d_n=|W|,\quad d_1+d_2+\cdots+d_n=N+n.$$

証明. $w\in W\leq O(V)$ であって、n 個の w 固有値のうち $n-1$ 個が 1 であるものは単位元 e もしくは鏡映 s に限られる。実際、$\operatorname{tr}_V w$ は実数だから残り 1 個の固有値も実数で、w が有限位数だからその値は ± 1 で、単位元か鏡映だと分かる。

命題を思い出して $\det(1-tw)$ を考えると、$\det(1-te)=(1-t)^n$, $\det(1-ts)=(1-t)^{n-1}(1+t)$ は明らかで、また上の議論からこれら以外の $w\in W$ については $\det(1-tw)$ は $(1-t)^{n-1}$ を因子に持たないことが分かる。従って、命題の等式の両辺を $(1-t)^n$ 倍すると

$$\frac{1}{|W|}\Big(1+N\frac{1-t}{1+t}+(1-t)^2g(t)\Big)=\prod_{i=1}^n\frac{1}{1+t+\cdots+t^{d_i-1}}$$

と書ける。但し $g(t)$ は分母が $1-t$ で割れない有理式。この等式で $t=1$ とすれば $|W|=d_1\cdots d_n$ を得る。

またこの等式を t で微分すれば

$$-\frac{2N}{|W|}\frac{1}{(1+t)^2}+h(t)=\sum_{j=1}^n -\frac{1+2t+\cdots+(d_j-1)t^{d_j-2}}{1+t+\cdots+t^{d_j-1}}\prod_{i=1}^n\frac{1}{1+t+\cdots+t^{d_i-1}}.$$

但し $h(t)$ は分子が $1-t$ で割り切れる有理式。そこで $t=1$ とすれば $-N/(2|W|)=-\sum_{i=1}^n(d_j-1)/(2d_1\cdots d_n)$ となって、これから結論を得る。 □

注意. $\Phi\supset\Pi$ を W のルート系および正ルート集合とすると、実は $N=|\Pi|=|\Phi|/2$.

3.5 基本不変式の例

具体的に基本不変式の組を見つける際、次の命題が有効である。

命題. $g_1, \ldots, g_n \in R = S^W$ が斉次で代数独立だとする。もし $\prod_{i=1}^n \deg g_i = |W|$ なら g_i 達は基本不変式の組。

証明. $e_i := \deg g_i$ とおく。$e_1 \leq \cdots \leq e_n$ と仮定してよい。$f_1, \ldots, f_n$ を基本不変式の組であって $d_1 := \deg f_1 \leq \cdots \leq d_n := \deg f_n$ となるものとする。任意の $i = 1, \ldots, n$ について $e_i \geq d_i$ であることが示せれば、前節 §3.4 の定理から $\prod_i d_i = |W| = \prod_i e_i$ なので任意の i について $d_i = e_i$. よって S^W の各斉次部分 S_k^W について $\dim(\langle g_1, \ldots, g_n\rangle \cap S_k^W) = \dim(\langle f_1, \ldots, f_n\rangle \cap S_k^W)$ が分かるので $\langle g_1, \ldots, g_n\rangle \cap S_k^W = S_k^W$. つまり g_i 達は S^W を生成する。

g_1 は f_i 達の多項式でかけるから $e_1 \geq d_1$. $e_i < d_i$ となる i が存在すると仮定して、そのうち最小のものを k とすると、$g_1, \ldots, g_k$ は $f_1, \ldots, f_{k-1}$ の多項式で書ける[*2]。しかし $g_1, \ldots, g_k$ 達が生成する有理関数体 $\mathbb{R}(g_1, \ldots, g_k)$ の $\mathbb{R}$ 上の超越次数は k. 従って超越次数が $k-1$ である $\mathbb{R}(f_1, \ldots, f_{k-1})$ に含まれることはない。 □

上の命題は代数独立性を仮定していた。代数独立性については次の Jacobian 判定法がある。

事実. K を標数 0 の体とする。$f_1, \ldots, f_n \in K[x_1, \ldots, x_n]$ が代数的に独立であることと

$$J(f_1, \ldots, f_n) := \det(\partial f_i / \partial x_j)_{i,j=1}^n$$

が 0 でないことは同値である。

例. A_n 型有限鏡映群 $W = \mathfrak{S}_{n+1} \leq O(V)$, $V = \{(a_i) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0\}$ の基本不変式を見つけよう。$S = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_{n+1}]/(x_1 + \cdots + x_{n+1})$ と書ける。冪和対称多項式

$$f_i := p_{i+1} = x_1^{i+1} + \cdots + x_{n+1}^{i+1} \quad (1 \leq i \leq n)$$

を取ると $d_i = \deg f_i = i+1$ で $\prod_{i=1}^n d_i = (n+1)! = |W|$. よって代数独立性を示せば命題が使える。$\partial f_i / \partial x_j = (i+1)x_j^i - (i+1)x_{n+1}^i$ より

$$\begin{aligned}
J(f_1, \ldots, f_n) &= (n+1)! \begin{vmatrix} x_1 - x_{n+1} & x_2 - x_{n+1} & \cdots & x_n - x_{n+1} \\ x_1^2 - x_{n+1}^2 & x_2^2 - x_{n+1}^2 & \cdots & x_n^2 - x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n - x_{n+1}^n & x_2^n - x_{n+1}^n & \cdots & x_n^n - x_{n+1}^n \end{vmatrix} \\
&= (n+1)!(-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = (n+1)!(-1)^n \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) \\
&= (n+1)! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \prod_{i=1}^n (x_i + z), \quad z := x_1 + x_2 + \cdots + x_n.
\end{aligned}$$

よって Jacobian は 0 でない。従って $f_1, \ldots, f_n$ が基本不変式の組であることが分かった。特に $\mathfrak{S}_{n+1} \leq O(V)$ の次数は $2, \ldots, n+1$.

参考文献

James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge の §§3.7–3.12.

以上です。

[*2] この部分はレポート問題とします