

2017 年度前期 代数学 I/代数学概論 V 6 月 1 日分レポート問題*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

レポート問題

レポートの提出期限は (今学期中という自明な期限は除いて) 特に設けません。解けたら提出して下さい。

講義で分からなかった所、扱ってほしい話題などありましたらレポートに書いて下さい。

レポート問題 1 (5 点). (1) 次数付き (可換) 環の定義を述べ、多項式環が次数付き環であることを説明せよ。

(2) 線形空間 V の対称代数 $S(V)$ の定義を述べよ。 (3) §3.1 の最初の補題を証明せよ。

レポート問題 2 (5 点). G を有限群、 V を体 K 上の線形空間であって G の線形作用があるものとする。 $|G|$ が K の標数で割り切れない時、Raynolds 作用素 $\rho: S \rightarrow R = S^G$ を $\rho(f) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot f$ で定義した。 ρ が以下の性質を満たすことを示せ。

(a) $\rho(f) \in R$ (ρ は確かに R への写像). また ρ は K 線形。 (b) $f \in S, g \in R$ なら $\rho(fg) = \rho(f)g$.

レポート問題 3 (5 点). §3.2.1 の命題の証明にある “ s_i 達も斉次と仮定できる” の部分を説明せよ。

レポート問題 4 (5 点). §3.2.3 の最後の補題の証明にある式 (3.5) $s_i \cdot p_i - p_i = lq_i$ の部分を説明せよ。

レポート問題 5 (5 点). A 型有限鏡映群、即ち対称群 $W = \mathfrak{S}_n$ の不変式環を考える。 $\mathfrak{S}_n \leq O(\mathbb{R}^n)$ と思うと、 $R = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ は対称多項式のなす環に他ならない。その斉次な生成元の取り方は無数にあるが、以下のものが古典的に知られている。

基本対称多項式 (elementary symmetric polynomials):

$$e_1 := \sum_{1 \leq i \leq n} x_i, e_2 := \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j, e_3 := \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} x_i x_j x_k, \dots, e_n := x_1 \cdots x_n.$$

完全対称多項式 (complete symmetric polynomials):

$$h_1 := \sum_{1 \leq i \leq n} x_i, h_2 := \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_i x_j, h_3 := \sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq n} x_i x_j x_k, \dots, h_n := \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$$

冪和対称多項式 (power sum symmetric polynomials):

$$p_1 := \sum_{1 \leq i \leq n} x_i, p_2 := \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^2, p_3 := \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^3, \dots, p_n := \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^n$$

(1) これらが実際に R の生成元であることを示せ。

(2) 整数係数の対称多項式環を $R' := \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ と表す。 $R' = \mathbb{Z}[e_1, \dots, e_n]$ 及び $R' = \mathbb{Z}[h_1, \dots, h_n]$ が成り立つが、 $R' \neq \mathbb{Z}[p_1, \dots, p_n]$ となることを示せ。

次回

6/8 は休講です (8 日午後から名大祭準備のため)。次回は 6/15 です。

この講義の webpage

このクラス用のウェブページを以下のアドレスに作りました。配布物や予定を載せていきます。

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2017S-AlgI.html>

以上です。