2017 年度前期 代数学 I/代数学概論 V　6 月 1 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

3　有限鏡映群の不変式

今回の目標は §3.2 の Chevalley の定理です。

3.1　不変式

まず (鏡映群とは限らない) 一般の群 G が有限次元線形空間 V に線形に作用している状況を考える。V の定義体を K とし、双対空間 V^* 上の対称代数を $S = S(V^*)$ と書く。

補題. V の基底を 1 つ取りその双対基底を $x_1, \ldots, x_n \in V^*$ とすると、K 代数同型 $S \xrightarrow{\sim} K[x_1, \ldots, x_n]$ が存在する。但し $n := \dim V$.

この補題を用いて、S の元の次数 deg を x_i 達の多項式と思った時の全次数として定める。これは V の基底の取り方、ないし x_i 達の取り方によらない。そしてこの次数でもって S を次数付き K 代数と思う。

G の V への作用から V^* への作用が $(g \cdot f)(v) := f(g^{-1}v)$ で定まる。但し $g \in G$, $f \in V^*$, $v \in V$. これから更に G の $S(V^*)$ への作用が自然に定まる。これもまた $g \cdot f$ と書く $(g \in G, f \in S)$. この作用は S の次数を保つ。

定義. $f \in S$ が G **不変** (G-invariant) であるとは任意の $g \in G$ に対し $g \cdot f = f$ となることを言う。また $S^G := \{f \in S \mid G \text{ 不変 }\}$ と定める。

S^G は S の次数付き部分 K 代数である。以下 $R := S^G$ と略記する。

また S の商体 (分数体) を L と書く。上の補題から $L \xrightarrow{\sim} K(x_1, \ldots, x_n)$ である。そして G の S への作用から自然に L への作用も定まる。従って L の元の G 不変性も同様に定義される。$L^G := \{f \in L \mid G \text{ 不変 }\}$ とする。

命題. K の標数は 0 であるとし、G は有限群だと仮定する。この時 R の商体は L^G と一致する。また R の商体の (K 上の) 超越次元は n.

証明. R の商体が L^G に含まれるは明らか。逆の包含関係を示す。$p/q \in L^G$ $(p, q \in S)$ とする。分母と分子に $\prod_{g \neq 1}(g \cdot p)$ をかけると分子は $p' := \prod_{g \in G}(g \cdot p)$ となって G 不変なので $q' := q \prod_{g \neq 1}(g \cdot p)$ も G 不変。よって $p/q = p'/q'$ は R の商体の元である。後半の主張については L^G の超越次元が n であることを示せばよいが、L/L^G が G を Galois 群とする有限次 Galois 拡大であることから L^G の超越次元は L の超越次元 n と等しい。 □

3.2　不変式に関する Chevalley の定理

V を n 次元 Euclid 空間、$W \leq O(V)$ を有限鏡映群とする。前節の諸定義を $K = \mathbb{R}$, $G = W$ に適用する。特に $S = S(V^*) \simeq \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 及び $R = S^W$ は次数付き $\mathbb{R}$ 代数である。R を W の**不変式環**と呼ぶ。

定理 (Chevalley の定理)**.** R は代数的に独立な n 個の斉次多項式によって ($\mathbb{R}$ 上の代数として) 生成される。

定義. R の代数的に独立な斉次生成元 $f_1, \ldots, f_n$ の組を**基本不変式** (basic invariants) の組という。

証明には幾つか準備を必要とする。

[*1] 2017/05/31 版, ver. 0.3.

3.2.1　有限生成性

ひとまず §3.1 の一般的状況に戻って、有限群 G が体 K 上の有限次元線形空間 V に線形に作用しているものとする。記号 $S := S^*(V)$, $R := S^G$ を用いる。

$R^+ \subset R$ を定数項が 0 である元からなる集合とする。R^+ は R のイデアルである。また $I := SR^+ \subset S$ を R^+ の生成する S のイデアルとする。

命題. $|G|$ が K の標数で割り切れないと仮定する。$f_1, \dots, f_r$ を R^+ の斉次元であって S のイデアル $I := SR^+$ を生成するものとする。この時 R は K 代数としてこれらで生成される。

証明の前に

注意. (1) Chevalley の定理の証明はこの命題を使って行う。つまり R^+ の有限生成系で極小なものを探せばこの命題から自動的に R の生成系になる。あとはこの生成系が代数的に独立であることを示せばよい。
(2) 命題の証明では次の **Raynolds 作用素**を用いる。

定義. Raynolds 作用素 $\rho : S \to R = S^G$ を次で定義する (K の標数の仮定により well-defined)。

$$\rho(f) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot f.$$

補題. Raynolds 作用素は以下の性質を満たす。
(a) $\rho(f) \in R$ (ρ は確かに R への写像). また ρ は K 線形。　(b) $f \in S$, $g \in R$ なら $\rho(fg) = \rho(f)g$.

補題の証明はレポート問題 2 とします。

命題の証明. 任意の $f \in R$ が f_i 達の多項式で書けることを示せばよい。f は斉次元だと仮定してよい。$\deg f$ の帰納法で示す。$\deg f = 0$ の場合は定数だから自明。

$\deg f > 0$ と仮定する。この時 $f \in I$ なので $f = s_1 f_1 + \cdots + s_r f_r$ ($s_i \in S$) と書ける。f, f_i は全て斉次なので s_i 達も斉次と仮定できる[*2]。両辺に Raynolds 作用素をあてて補題を用いると $f = \rho(s_1)f_1 + \cdots + \rho(s_r)f_r$. $\rho(s_i)$ は次数が $\deg f$ 未満の R の斉次元だから、帰納法の仮定より f_i 達の多項式で書ける。よって f 自身も f_i 達の多項式で書ける。 □

3.2.2　環と加群の一般論

定義. R を可換環とする。
(1) 任意の部分加群が有限生成である R 加群を Noether R 加群と呼ぶ。
(2) R が R 加群として Noether である時、R を Noether(可換) 環と呼ぶ。

定理 (Hilbert の基底定理)**.** R を Noether 可換環とすると、R 上有限生成な可換代数は Noether 環である。特に体上の有限生成可換代数は Noether 環。

3.2.3　Chevalley の定理の証明

§3.2 の状況に戻る。つまり $W \subset O(V)$ は有限鏡映群、$S := S(V^*) \simeq \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, $R := S^W$ とする。§3.2.1 と同様に、$R_+ \subset R$ を正の次数の斉次元が生成される R のイデアル、$I := SR_+ \subset S$ を R_+ が生成する S のイデアルとする。

S は多項式環だから Hilbert の基底定理より Noether 環。よってそのイデアル I は有限生成で、特に (極小な) 生成系 $f_1, \dots, f_r \in S$ が取れる。f_i 達は斉次元で $\deg f_i > 0$ と仮定できる。

主張. f_i 達は代数的に独立。

[*2] この部分の補完はレポート問題 3 とします

この主張が示せれば §3.2.1 の命題より f_i 達は R を生成する。つまり $R=\mathbb{R}[f_1,\dots,f_r]$. すると §3.1 の命題から R の商体の超越次元は $r=n$ となる。これで Chevalley の定理の証明が終わる。

主張の証明. f_i 達の任意の代数関係式 $h(f_1,\dots,f_r)=0$ を考える。$h=h(y_1,\dots,y_r)\in\mathbb{R}[y_1,\dots,y_r]$ は r 変数の多項式で $h\neq 0$ である。

$f_i=f_i(x_1,\dots,x_n)$ の次数を d_i として、$\mathbb{R}[y_1,\dots,y_r]$ の次数を $\deg' y_i:=d_i$ で定義することができる。すると h はこの $\deg'$ に関して斉次だと仮定してよい。以下 $d:=\deg' h$ と書く。

ここで各 $k=1,\dots,n$ について、関係式 $h(f_1,\dots,f_r)=0$ の両辺を x_k で微分して

$$\sum_{i=1}^r h_i\frac{\partial f_i}{\partial x_k}=0,\quad h_i:=\frac{\partial h}{\partial y_i}(f_1,\dots,f_r). \tag{3.1}$$

各 h_i は $\deg'$ について斉次であり、また $\deg' h_i=d-d_i$.

必要なら h_i 達の添え字を付け直して、$h_1,\dots,h_m$ が R のイデアル $(h_1,\dots,h_r)$ の極小な生成系だと仮定する。但し $m\leq r$. すると各 $i>m$ について

$$h_i=\sum_{j=1}^m g_{ij}h_j\quad (g_{ij}\in R) \tag{3.2}$$

と書ける。$\deg' h_i=d-d_i$ より、必要なら非斉次項を消去して、g_{ij} は斉次元だと仮定できる。この時 $\deg g_{ij}=d_j-d_i$. (3.2) を (3.1) に代入して

$$\sum_{i=1}^m h_ip_i=0,\quad p_i:=\frac{\partial f_i}{\partial x_k}+\sum_{j=m+1}^r g_{ji}\frac{\partial f_j}{\partial x_k}. \tag{3.3}$$

p_i 達は S の斉次元であって $\deg p_i=d_i-1$ であることに注意する。ここで次の補題を用意する。

補題. $h_1,\dots,h_m\in R=S^W$ に対し $J:=(h_2,\dots,h_m)\subset R$ を R のイデアルとする。$h_1\notin J$ かつ

$$h_1p_1+\cdots+h_mp_m=0 \tag{3.4}$$

なる $p_1,\dots,p_r\in S$ が存在すると仮定する。この時 $p_1\in I=SR_+$.

補題の証明は後で与える。$h_1,\dots,h_m$ が極小な生成系なので補題を (3.3) に適用できて、$p_1\in I$. よって

$$p_1=\frac{\partial f_1}{\partial x_k}+\sum_{j=m+1}^r g_{j1}\frac{\partial f_j}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^r f_iq_i\quad (q_i\in S)$$

と書ける。この等式の両辺を x_k 倍して k に関して和を取れば

$$\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial f_1}{\partial x_k}+\sum_{k=1}^n x_k\sum_{j=m+1}^r g_{j1}\frac{\partial f_j}{\partial x_k}=\sum_{k=1}^n x_k\sum_{i=1}^r f_iq_i.$$

ここで斉次多項式に関する Euler の公式

$$\vartheta f(x)=f(x)\cdot(\deg f),\quad \vartheta:=\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

を使って最後の等式を書き直すと

$$d_1f_1+\sum_{j=m+1}^r d_jg_{j1}f_j=\sum_{i=1}^r f_ir_i\quad r_i:=q_i\sum_{k=1}^n x_k. \tag{3.5}$$

左辺の各項は次数 d_1 の斉次元で、一方で $\deg r_1>0$ だから右辺の f_1r_1 は $\sum_{i=2}^n f_ir_i$ のうち次数が d_1 でない項と打ち消しあう。このことを考慮して (3.5) を整理し直すと $f_1=\sum_{i=2}^r f_is_i$ の形に書き直せる。つまり $f_1\in(f_2,\dots,f_r)\subset S$. しかしこれは証明の最初の $f_1,\dots,f_r$ の取り方と矛盾する。 $\square$

補題の証明. まず h_1 が $h_2, \dots, h_r$ の生成する S のイデアルに含まれないことに注意する。実際、もし含まれていれば $h_1 = h_2 g_2 \cdots + h_m g_m$ となる $g_i \in S$ があるが、Raynolds 作用素をあてると $h_1 = h_2\rho(g_2) + \cdots + h_m\rho(g_m)$ となって、$\rho(g_i) \in R$ より $h_1 \in J$ となり矛盾する。

$p_1 \in I$ を $\deg p_1$ に関する帰納法で示す。$\deg p_1 = 0$ の時は自明なので $\deg p_1 > 0$ と仮定する。

$s = s_\alpha \in W$ を鏡映とすると、$s \cdot p_i - p_i$ は超平面 $H_\alpha \subset V$ 上で 0. 従って H_α を定義する 1 次式を $l \in S$ とすれば

$$s \cdot p_i - p_i = l q_i \quad (q_i \in S) \tag{3.6}$$

となる[*3]。ここで (3.4) の両辺に s を作用させて $h_1(s \cdot p_1) + \cdots + h_r(s \cdot p_r) = 0$. この式と (3.4) の差を取り、(3.6) を代入して整理すると $l(h_1 q_1 + \cdots + h_r q_r) = 0$. $l \neq 0$ だから

$$h_1 q_1 + \cdots + h_r q_r = 0.$$

ここで (3.6) の左辺は $\deg p_i$ の斉次元だから、q_i も斉次元で $\deg q_i < \deg p_i$. 特に $\deg q_1 < \deg p_1$ なので帰納法の仮定が使えて $q_1 \in I$. 再び (3.6) より $s \cdot p_1 \equiv p_1 \pmod I$.

これまでの議論で $s = s_\alpha \in W$ は任意に取った。鏡映で W は生成されるので、任意の $w \in W$ について $w \cdot p_1 \equiv p_1 \pmod I$. よって Raynolds 作用素 $\rho(p_1) = \frac{1}{|W|}\sum_{w \in W} w \cdot p_1$ について $\rho(p_1) \equiv p_1 \pmod I$. これと $\rho(p_1) \in R^+$ より $p_1 \in I$. □

注意. Chevalley の定理の証明で W が鏡映群であることを使っているのは最後の補題の所のみである。

注意. Chevalley の定理の逆と見なせる、次の **Shephard-Todd の定理**が成立する。

「V を Eulcid 空間、G を $\mathrm{GL}(V)$ の有限部分群とする。$S = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ の G 不変部分環 S^G が n 個の代数的に独立な斉次多項式で生成されると仮定する。この時 G はそれに含まれる (V の) 鏡映で生成される。特に G は有限鏡映群である。」

この講義では Shephard-Todd の定理は証明しない。Humphreys の §3.11 もしくは次の日本語のテキストに証明が与えられている。

堀田、渡辺、庄司、三町「群論の進化」朝倉書店 (2004 年)
第 2 章 有限群の不変式論 (渡辺敬一) §2.5.

参考文献

James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge の §§3.1–3.5.

以上です。

[*3] この部分はレポート問題 4 とします。