2017 年度前期 代数学 I/代数学概論 V　5 月 25 日分資料/レポート問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

Weyl 群に対応する正定値グラフ

今回また必要になります。

A_n $(n \geq 1)$

B_n $(n \geq 2)$

D_n $(n \geq 4)$

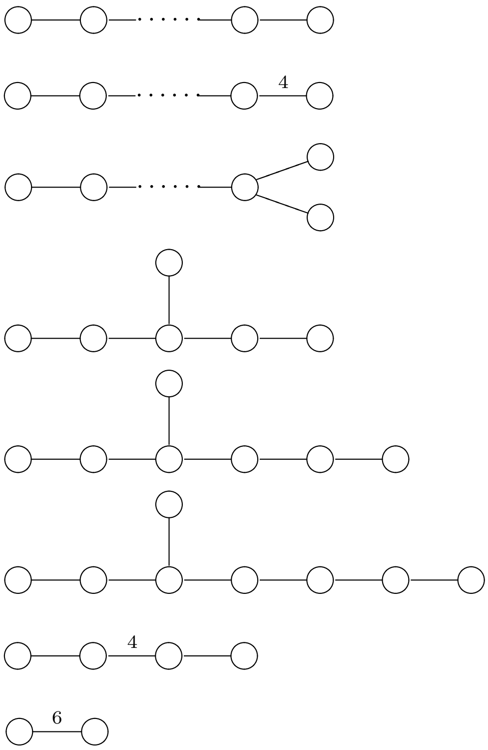
E_6

E_7

E_8

F_4

G_2



レポート問題

レポートの提出期限は (今学期中という自明な期限は除いて) 特に設けません。解けたら提出して下さい。
講義で分からなかった所、扱ってほしい話題などありましたらレポートに書いて下さい。
ここに挙げた問題以外でも、関連する話題についてレポートにしてくださっても構いません。

レポート問題 1 (5–10 点)**.** 講義中に省略した議論や主張の証明を補え。

レポート問題 2 (5 点)**.** 階数 2 の既約 Weyl 群 $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \mathrm{G}_2$ について基本領域を求めよ (適宜座標をとって図示すると良い)。

レポート問題 3 (計 20 点)**.** 講義ノートでは扱っていない H_4 の実現について考える。
(1) $V = \mathbb{R}^4$ とその Euclid 内積を四元数体 $\mathbb{H} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ で書き直す。まず $\mathbb{R}$ 上の線形同型

$$V \longrightarrow \mathbb{H}, \quad (c_1, \ldots, c_4) \longmapsto c_1 + c_2 i + c_3 j + c_4 k$$

で両者を同一視する (記号の濫用だが $\lambda = (c_1, \ldots, c_4) = c_1 + c_2 i + c_3 j + c_4 k$ 等と書く)。この時 V の Euclid 内積 $(\cdot, \cdot)$ が

$$(\lambda, \mu) = \frac{1}{2}\big(\lambda\overline{\mu} + \mu\overline{\lambda}\big)$$

[*1] 2017/07/06 版, ver. 0.3

と書けることを確認せよ。但し $\lambda = c_1 + c_2 i + c_3 j + c_4 k$ に対し $\overline{\lambda} := c_1 - c_2 i - c_3 j - c_4 k$.
(2) $\|\lambda\| := \lambda\overline{\lambda} \in \mathbb{R}$ と定義すればこれは (1) より $(\cdot,\cdot)$ に対応したノルムである。また $\lambda \neq 0$ なら明らかに $\lambda^{-1} = \lambda/\|\lambda\|$. この時、$\|\alpha\| = 1$ なる $\alpha \in \mathbb{H}$ を V の元とみなし鏡映 s_α を考えると、s_α の作用は $\mathbb{H}$ において

$$s_\alpha(\lambda) = -\alpha\overline{\lambda}\alpha$$

と書けることを確認せよ。
(3) H_4 の Coxeter グラフにラベル $m = 5$ があることを考慮して、三角関数の値を

$$a := \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad b := \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

と表しておく。$2a = 2b+1, 4ab = 1, 4a^2 = 2a+1, 4b^2 = -2b+1$ が成立する。$\Phi \subset \mathbb{H}$ を

$$(1,0,0,0) = 1, \quad (\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1+i+j+k), \quad (a,\frac{1}{2},b,0) = a + \frac{1}{2}i + bj$$

と各成分を偶置換するか符号変換して得られるものからなる部分集合とする。$|\Phi| = 120$ 及び Φ の任意の元のノルムが 1 であることを確認せよ (「1 への偶置換と符号変換の作用」によって $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ の 8 個が現れると数える)。
(4) Φ は群 $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ の部分群であることを確かめよ。
実は $\mathbb{H}$ の有限部分群で偶数位数のものは必ずルート系になることが知られている (Humphreys の本の §2.13, Lemma)。従って Φ はルート系である。
(5) $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_4\} \subset \Phi$ を

$$\alpha_1 := a - \frac{1}{2}i + bj, \quad \alpha_2 := -a + \frac{1}{2}i + bj, \quad \alpha_3 := \frac{1}{2} + bi - aj, \quad \alpha_4 := -\frac{1}{2} - ai + bk$$

で定める。これらの内積を計算して $\mathbb{H}_4$ の Coxeter グラフと合致することを確認せよ。
これと 4/20 のレポート問題 1 から Δ は Φ の単純ルート集合だとわかる。以上で H_4 型 Coxeter グラフを実現するルート系の存在が分かった。

レポート問題 4 (10 点)**.** 実は $W(\mathrm{H}_3)$ は正 20 面体の対称性を表す群である (従って正 12 面体の対称性を表す群でもある)。このことから $W(\mathrm{H}_3) \simeq \{\pm 1\} \times A_5$ となることを説明せよ。但し A_5 は 5 次交代群。特に $|W(\mathrm{H}_3)| = 120$ である。

レポート問題 5 (10 点)**.** 講義ノートの §2.11 の方法と $|W(\mathrm{H}_3)| = 120$ を用いて $W(\mathrm{H}_4)$ の位数が 120×120 であることを示せ。

出典について

レポート問題 3–5 は Humphreys, “Reflection Groups and Coxeter Groups”, §2.13 の内容から出題しています。

この講義の webpage

このクラス用のウェブページを以下のアドレスに作りました。配布物や予定を載せていきます。
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/˜yanagida/2017S-AlgI.html

以上です。