2017 年度前期 代数学 I/代数学概論 V　5 月 25 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

2.8 Weyl 群

V を Euclid 空間とする。以下ルート系といったら V 上のものを考える。

定義. (1) ルート系 Φ は次の条件を満たすとき結晶的 (crystallographic) であるという。

$$\text{(R3)} \qquad \frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} \in \mathbb{Z} \quad (\forall \alpha, \beta \in \Phi)$$

(2) 結晶的ルート系 Φ に付随した有限鏡映群 $W(\Phi)$ を (有限)**Weyl 群**という。

注意. §1.2 で注意したように、今まで扱ってきた 2 条件 (R1),(R2) で定義されるルート系は Lie 理論に現れるものとは違う。結晶的ルート系、つまり **3 条件 (R1)–(R3) で定義されるものが通常ルート系と呼ばれる**ものである。

鏡映の作用 $s_\alpha v = v - 2(\alpha, v)/(\alpha,\alpha) \cdot \alpha$ より次の補題が成り立つ。

補題. Φ を結晶的ルート系、$\Delta \subset \Phi$ を単純ルート集合とすると $\Phi \subset \mathbb{Z}\Delta$. また $\mathbb{Z}\Delta \subset V$ は $W(\Phi)$ の作用で不変。

系. Φ を結晶的ルート系とすると任意の $w \in W(\Phi)$ について $\mathrm{tr}_V(w) \in \mathbb{Z}$.

証明. Δ を含む V の基底をとることができる。$\mathbb{R}\Delta \subset V$ の直交補空間への $W(\Phi)$ の作用は自明だから $\mathrm{tr}_V(w) = \mathrm{tr}_{\mathbb{R}\Delta}(w) + \dim V - \dim \mathbb{R}\Delta$. 補題より $w|_{\mathbb{R}\Delta} \in O(\mathbb{R}\Delta)$ を基底 Δ で行列表示すれば成分は全て整数。よって $\mathrm{tr}_{\mathbb{R}\Delta}(w)$ も整数。 □

命題. Φ を結晶的ルート系、$\Delta \subset \Phi$ をその単純ルート集合とする。任意の $\alpha, \beta \in \Delta$ について $\alpha \neq \beta$ なら

$$m(\alpha,\beta) \in \{2,3,4,6\}.$$

証明. $\alpha \neq \beta$ より $s_\alpha s_\beta \in W(\Phi)$ は $s_\alpha s_\beta \neq 1$ であり、平面 $\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta \subset V$ 上に回転で作用し、直交補空間には自明に作用する。回転の角度は $\theta := 2\pi/m(\alpha,\beta)$. よって適当に V の基底をとって $\mathrm{tr}_V(s_\alpha s_\beta) = 2\cos\theta + \dim V - 2$. すると上の系より $2\cos\theta \in \mathbb{Z}$. これから $\cos\theta = -1, -1/2, 0, 1/2$. □

例. この命題から H_3, H_4 および $m \neq (1,2,)3,4,6$ の $\mathrm{I}_2(m)$ は結晶的ではない。

注意. 以下 $\mathrm{G}_2 := \mathrm{I}_2(6)$ と書く。なお $\mathrm{I}_2(3) = \mathrm{A}_2$, $\mathrm{I}_2(4) = \mathrm{B}_2$ に注意。

2.9 Weyl 群に付随したルート系

前節の最後の例 (および注意) とは逆に

定理. §2.4 の正定値な Coxeter グラフのうち、$\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{D}_n, \mathrm{E}_{6,7,8}, \mathrm{F}_4, \mathrm{G}_2$ は Weyl 群に対応する。

上述の Coxeter グラフ Γ から上手くルート系の実現 $\Phi \subset V$ を探してきて、それが結晶的であることを確認すればよい。$\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{D}_n$ については §1.1 の例で説明したことが欲しいルート系の実現になっている。これらの復習から定理の証明を始める。

注意. (1) B_n 型 Coxeter グラフには 2 つの結晶的ルート系 B_n と C_n が対応する。C_n も以下で説明する。
(2) $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$ は**古典型ルート系**、$\mathrm{E}_{6,7,8}, \mathrm{F}_4, \mathrm{G}_2$ は**例外型ルート系**と呼ばれる。

[*1] 2017/05/23 版, ver. 0.3.

また後で必要になる最高ルートについても説明していく。

定義. (1) 結晶的ルート系 $\Phi \subset V$ と単純ルート集合 $\Delta \subset \Phi$ について、V 上の半順序 $\geq$ を以下で定義する。

$$\lambda \geq \mu \overset{\text{dfn}}{\iff} \lambda - \mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Delta. \tag{2.1}$$

(2) Φ において半順序 $\geq$ で最大となる元を**最高ルート** (highest root) と呼ぶ。

注意. Φ が §2.2 の意味で既約なら最高ルートが存在することが知られている。以下ではそれを $\widetilde{\alpha} \in \Phi$ とかく。

各 Coxeter グラフに対応するルート系の実現 $V \supset \Phi \supset \Delta$ を次のように定める。最高ルート $\widetilde{\alpha}$ も書いてある。古典型については $W = W(\Phi)$ およびその V への作用も記す。

2.9.1　A_n 型

$V := \{\sum_{i=1}^{n+1} a_i\varepsilon_i \mid \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$,
$\Phi := \{v \in V \mid (v,v) = 2\} \cap \oplus_{i=1}^{n+1}\mathbb{Z}\varepsilon_i = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$,
$\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \alpha_n := \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}\}$,
$\widetilde{\alpha} = \varepsilon_1 - \varepsilon_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$,
$W = \mathfrak{S}_{n+1}$，ε_i の添え字の置換で V に作用。

2.9.2　B_n 型

Φ は長さの 2 乗が 1 のものが $2n$ 個、2 のものが $2n(n-1)$ 個で計 $2n^2$ 個ある。

$V := \mathbb{R}^n$,
$\Phi := \{v \in V \mid (v,v) \in \{1,2\}\} \cap \oplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}\varepsilon_i$
$\quad = \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$,
$\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \alpha_{n-1} := \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \alpha_n := \varepsilon_n\}$,
$\widetilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{n-1} + 2\alpha_n$,
$W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$，$\mathfrak{S}_n$ は ε_i の添え字の置換で、$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ は $\varepsilon_i \mapsto -\varepsilon_i$ で作用。

2.9.3　C_n 型

C_n 型ルート系は B_n 型の "双対"である。

$V := \mathbb{R}^n$,
$\Phi := \{v \in V \mid (v,v) \in \{2,4\}\} \cap \oplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}\varepsilon_i$
$\quad = \{\pm 2\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$,
$\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \alpha_{n-1} := \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \alpha_n := 2\varepsilon_n\}$,
$\widetilde{\alpha} = 2\varepsilon_1 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n$,
$W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, 作用は B_n の時と同様。

2.9.4　D_n 型

$V := \mathbb{R}^n$,
$\Phi := \{v \in V \mid (v,v) = 2\} \cap \oplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}\varepsilon_i$
$\quad = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$,
$\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \alpha_{n-1} := \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \alpha_n := \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n\}$,
$\widetilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n$.
$W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$, $\mathfrak{S}_n$ は ε_i の添え字の置換で、$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$ は偶数個の符号変換 $\varepsilon_i \mapsto -\varepsilon_i$ で作用。

2.9.5　G_2 型

例外型ルート系の実現は古典型に比べるとあまり “自然” には見えない。例えば $\mathrm{G}_2 = \mathrm{I}_2(6)$ だが、§1.1 で述べた二面体群のルート系の実現は条件 (R3) と相性が悪い。下記の実現が知られている。$|\Phi| = 6 + 6 = 12$ である。

$$
\begin{aligned}
&V := \{\textstyle\sum_{i=1}^{3} a_i\varepsilon_i \mid \sum_{i=1}^{3} a_i = 0\} \subset \mathbb{R}^3,\\
&\Phi := \{v \in V \mid (v,v) \in \{2,6\}\} \cap \oplus_{i=1}^{3}\mathbb{Z}\varepsilon_i\\
&\quad = \{\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \mid 1 \le i < j \le 3\} \cup \{\pm(2\varepsilon_i - \varepsilon_j - \varepsilon_k) \mid \{i,j,k\} = \{1,2,3\}\},\\
&\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\, \alpha_2 := -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\},\\
&\widetilde{\alpha} = 2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2. \qquad W = \mathcal{D}_6 \text{ は位数 12 の二面体群。}
\end{aligned}
$$

2.9.6　F_4 型

補助的に格子 $L \subset V$ を導入する。$|\Phi| = 48$ で、長さの 2 乗が 1 のものと 2 のものが 24 個ずつある。

$$
\begin{aligned}
&V := \mathbb{R}^4,\\
&L := \oplus_{i=1}^{4}\mathbb{Z}\varepsilon_i + \mathbb{Z}(\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{4}\varepsilon_i),\\
&\Phi := \{v \in L \mid (v,v) \in \{1,2\}\}\\
&\quad = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le 4\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \le i \le 4\} \cup \{\tfrac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)\},\\
&\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\, \alpha_2 := \varepsilon_3 - \varepsilon_4,\, \alpha_3 := \varepsilon_4,\, \alpha_4 := \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)\}.\\
&\widetilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4.
\end{aligned}
$$

2.9.7　E_8 型

再び補助的な格子 $L \subset V$ を導入する。$|\Phi| = 240$ である。

$$
\begin{aligned}
&V := \mathbb{R}^8,\\
&L := \{\textstyle\sum_{i=1}^{8} c_i\varepsilon_i \mid c_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^{8}\varepsilon_i \in 2\mathbb{Z}\} + \mathbb{Z}(\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{8}\varepsilon_i),\\
&\Phi := \{v \in L \mid (v,v) = 2\}\\
&\quad = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le 8\} \cup \{\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{8} \pm \varepsilon_i \mid - \text{ が偶数個 }\},\\
&\Delta := \{\alpha_1 := \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8),\, \alpha_2 := \varepsilon_1 + \varepsilon_2,\, \alpha_i := \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_{i-2}\ (3 \le i \le 8)\}.\\
&\widetilde{\alpha} = \varepsilon_7 + \varepsilon_8.
\end{aligned}
$$

2.9.8　E_7 型

Coxeter グラフが E_8 型の部分グラフであることに注意する。$\Delta(\mathrm{E}_8) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_8\} \subset \Phi(\mathrm{E}_8) \subset \mathbb{R}^8$ と E_8 型のルート系および単純ルート集合を書く。$|\Phi| = 126$.

$$
\begin{aligned}
&V := \mathbb{R}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_7\} \subset \mathbb{R}^8,\\
&\Phi := \Phi(\mathrm{E}_8) \cap V\\
&\quad = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le 6\} \cup \{\pm(\varepsilon_7 - \varepsilon_8)\} \cup \{\pm\tfrac{1}{2}(\varepsilon_7 - \varepsilon_8 + \textstyle\sum_{i=1}^{6} \pm \varepsilon_i) \mid \sum \text{ の中の } - \text{ は奇数個 }\},\\
&\Delta := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_7\}, \quad \widetilde{\alpha} = \varepsilon_8 - \varepsilon_7.
\end{aligned}
$$

2.9.9　E_6 型

再び E_8 型のルート系および単純ルート集合を使う。$|\Phi| = 72$.

$$
\begin{aligned}
&V := \mathbb{R}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_6\} \subset \mathbb{R}^8,\\
&\Phi := \Phi(\mathrm{E}_8) \cap V\\
&\quad = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le 5\} \cup \{\pm\tfrac{1}{2}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \textstyle\sum_{i=1}^{5} \pm \varepsilon_i) \mid \sum \text{ の中の } - \text{ は奇数個 }\},\\
&\Delta := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_6\},\\
&\widetilde{\alpha} = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8).
\end{aligned}
$$

2.10　基本領域

次の §2.11 で Weyl 群の位数を計算する際、基本領域の概念を用いる。基本領域は Weyl 群や鏡映群に限らず「良い」群作用がある状況では大切で大変有用な概念である。

定義. 有限鏡映群 $W = W(\Phi) \le O(V)$ の単純ルート集合 $\Delta \subset \Phi$ を固定する。$C \subset D \subset V$ を次のように定める。

$$C := \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha) > 0 \ \forall \alpha \in \Delta\}, \quad D := \overline{C} = \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha) \ge 0 \ \forall \alpha \in \Delta\}.$$

定理. $\Delta \subset \Phi$ を固定する (従って $D \subset V$ も固定)。この時 D は V の W 作用に関する**基本領域**である。即ち
(1) 任意の $\lambda \in V$ はある $\mu \in D$ と W 共役。　(2) $w \in W$ と $\lambda, \mu \in D$ について、$w\lambda = \mu$ ならば $\lambda = \mu$.

証明. (1) V 上の半順序 (2.1)

$$\mu \ge \lambda \iff \mu - \lambda \in \mathbb{Z}_{\ge 0}\Delta$$

を思い出す。集合 $M := \{\mu \in V \mid \lambda \text{ と } W \text{ 共役かつ } \mu \ge \lambda\}$ は λ を含むから空ではない。よって (Zorn の補題により)M には極大元 μ がある。任意の $\alpha \in \Delta$ について $s_\alpha \mu$ は λ と W 共役だから、$s_\alpha \mu = \mu - 2(\mu, \alpha)/(\alpha, \alpha) \cdot \alpha$ と μ の極大性から $(\mu, \alpha) \ge 0$. よって結論を得る。
(2) $\ell(w) = n(w)$ に関する帰納法で示す。$n(w) = 0$ なら $w = e$ より自明。$n(w) > 0$ ならある $\alpha \in \Delta$ があって $w\alpha \in -\Pi$. よって §1.6 の補題[*2]より $n(ws_\alpha) = n(w) - 1$. また $\lambda, \mu \in D$ と $w\alpha \in -\Pi$ から

$$0 \ge (\mu, w\alpha) = (w^{-1}\mu, w^{-1}w\alpha) = (\lambda, \alpha) \ge 0.$$

これから $(\lambda, \alpha) = 0$ 及び $s_\alpha \lambda = \lambda$ を得るので $ws_\alpha \lambda = \mu$. すると帰納法の仮定から $\lambda = \mu$. □

(2) の証明からより精密に次のことが分かる。

系. $\lambda, \mu \in D$ について $w\lambda = \mu$ なら $\lambda = \mu$ かつ w は λ を固定する単純鏡映の積。特に $\lambda \in C$ ならその固定化群 $\{w \in W \mid w\lambda = \lambda\}$ は自明。

2.11　Weyl 群の位数

定理. 既約な有限鏡映群の位数とルートの数は以下の表 1 のようになる。

	A_n	$\mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n$	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2	H_3	H_4	$\mathrm{I}_2(m)$
$\lvert W \rvert$	$(n+1)!$	$2^n n!$	$2^{n-1} n!$	$2^7 3^4 5$	$2^{10} 3^4 5^1 7$	$2^{14} 3^5 5^2 7$	$2^7 3^2$	12	120	14400	$2m$
$\lvert \Phi \rvert$	$n(n+1)$	$2n^2$	$2n(n-1)$	72	126	240	48	12	30	120	$2m$

表 1　有限鏡映群の位数とルートの数

古典型 Weyl 群と二面体群は分かりやすい実現を持っており、位数はそれから容易に計算できる。しかしその他の例外型 Weyl 群や $\mathrm{H}_{3,4}$ 型の群の実現は複雑である。以下ではルートの集合への W の作用から例外型 Weyl 群の位数を計算してみる。なお $\mathrm{H}_{3,4}$ 型についてはレポート問題を参照せよ。
まず次の初等的な事実を思い出す。

事実. 有限群 G が有限集合 X に作用しているとする。$x \in X$ に対し $Gx := \{gx \mid g \in G\}$ で x の G 軌道、$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$ で x の固定化群を書くと $|G| = |Gx|\,|G_x|$.

この主張を $G = W$, $X = \Phi \ni x = \widetilde{\alpha}$ に適用したい。$W\widetilde{\alpha}$ や $W_{\widetilde{\alpha}}$ を決定するため、少し準備をする。
§2.9 のルート系の実現において、ルートの長さは全て同じ (A_n, D_n, E_n 型) か 2 種類 ($\mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{F}_4, \mathrm{G}_2$ 型) のどちらかであることに注意する。

[*2] 4/27 の講義ノート参照。

定義. (1) A_n, D_n, E_n 型の (結晶型) ルート系は **simply laced** であると呼ばれ、$\mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{F}_4, \mathrm{G}_2$ 型は **non simply laced** であると呼ばれる。
(2) non simply laced の場合、長い方のルートを**長ルート** (long root), 短い方のルートを**短ルート** (short root) と呼ぶ。それぞれの集合を Φ_l, Φ_s と書く。また simply laced の場合は (記号の濫用だが) $\Phi_l := \Phi$ と定める。

命題. (既約な結晶型ルート系において) 同じ長さのルートの集合は W 作用において 1 つの軌道をなす。

証明. simply laced の場合、任意のルートは単純ルートを W 共役だから、Coxeter グラフで隣り合う頂点に対応した単純ルートが W 共役であることを示せばよい。これは結局 A_2 型の場合だから、$W(\mathrm{A}_2) = \mathfrak{S}_3$ の元である巡回置換 $(1,2,3)$ で $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ が $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ に写ることから従う。

non simply laced の場合は長ルートに対応した頂点がラベル $m = 3$ の辺だけで連結成分をなしていて、短ルートについても同様なので、前半の A_2 型の議論に帰着する。 □

補題. (1) $\widetilde{\alpha} \in \Phi_l$.
(2) $\widetilde{\alpha}$ は W の基本領域 D に含まれる。

証明. (1) §2.9 のリストから分かる。
(2) 任意の $\alpha \in \Delta$ に対し $(\widetilde{\alpha}, \alpha) \geq 0$. 実際 $(\widetilde{\alpha}, \alpha) < 0$ だと $s_\alpha \widetilde{\alpha} > \widetilde{\alpha}$ となり矛盾する。これから結論を得る。 □

以上で主張を使う準備が整った。まず命題と補題 (1) より $W\widetilde{\alpha} = \Phi_l$ なのでその濃度は計算できる。また補題 (2) と §2.10 の系から、固定化群 $W_{\widetilde{\alpha}}$ は $\widetilde{\alpha}$ と直交する単純ルートに対応した単純鏡映で生成される。このことと Coxeter グラフを参照すると $W_{\widetilde{\alpha}}$ を決定することができる。

それでは具体的に $|W|$ を計算しよう。

- F_4 の場合。$|\Phi_l| = 24$. また $\widetilde{\alpha}$ は $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ と直交する。それらは C_3 型の Coxeter グラフをなしているので $W_{\widetilde{\alpha}} \simeq W(\mathrm{C}_3)$ で位数 48. よって $|W| = 24 \cdot 48 = 2^7 3^2$.
- E_6 の場合。$|\Phi_l| = 72$. $\widetilde{\alpha}$ は α_2 以外の単純ルートと直交する。よって Coxeter グラフから $W_{\widetilde{\alpha}} \simeq W(\mathrm{A}_5)$ で位数 $6!$. よって $|W| = 72 \cdot 6! = 2^7 3^4 5$.
- E_7 の場合。$|\Phi_l| = 126$. $\widetilde{\alpha}$ は α_1 以外の単純ルートと直交する。よって Coxeter グラフから $W_{\widetilde{\alpha}} \simeq W(\mathrm{D}_6)$ で位数 $2^5 6!$. よって $|W| = 126 \cdot 2^5 6! = 2^{10} 3^4 5^1 7$.
- E_8 の場合。$|\Phi_l| = 240$. $\widetilde{\alpha}$ は α_8 以外の単純ルートと直交する。よって Coxeter グラフから $W_{\widetilde{\alpha}} \simeq W(\mathrm{E}_7)$. よって $|W| = 240 \cdot 2^{10} 3^4 5^1 7 = 2^{14} 3^5 5^2 7$.

参考文献

James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge の §2.8–2.11.

以上です。