2017 年度前期 代数学 I/代数学概論 V　5 月 18 日分資料/レポート問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

2.9 Weyl 群に付随したルート系

$\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{D}_n, \mathrm{E}_{6,7,8}, \mathrm{F}_4, \mathrm{G}_2 = \mathrm{I}_2(6)$ 型の Coxeter グラフ Γ は結晶的ルート系 Φ に付随する Coxeter グラフ $\Gamma(W(\Phi), \Delta)$ として現れる。対応した有限鏡映群 $W(\Phi)$ は Weyl 群と呼ばれる。B_n 型は実現の仕方が 2 つあり、B_n 及び C_n と書かれる。

各副節でこれら結晶的ルート系の実現 $\Phi \subset V$ の仕方、単純ルート集合 $\Delta \subset \Phi$ および最高ルート $\widetilde{\alpha} \in \Phi$ を列挙する。古典型ルート系 $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$ については $W = W(\Phi)$ およびその V への作用も記す。

2.9.1 A_n 型

$V := \{\sum_{i=1}^{n+1} a_i \varepsilon_i \mid \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$,

$\Phi := \{v \in V \mid (v,v) = 2\} \cap \oplus_{i=1}^{n+1} \mathbb{Z}\varepsilon_i = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \le i \ne j \le n\}$,

$\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \alpha_n := \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}\}$,　$\widetilde{\alpha} = \varepsilon_1 - \varepsilon_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$,

$W = \mathfrak{S}_{n+1}$, ε_i の添え字の置換で V に作用。

2.9.2 B_n 型

$V := \mathbb{R}^n$,　$\Phi := \{v \in V \mid (v,v) \in \{1,2\}\} \cap \oplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\varepsilon_i = \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \le i \le n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\}$,

$\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \alpha_{n-1} := \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \alpha_n := \varepsilon_n\}$

$\widetilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{n-1} + 2\alpha_n$,

$W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, $\mathfrak{S}_n$ は ε_i の添え字の置換で、$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ は $\varepsilon_i \mapsto -\varepsilon_i$ で作用。

2.9.3 C_n 型

$V := \mathbb{R}^n$,　$\Phi := \{v \in V \mid (v,v) \in \{2,4\}\} \cap \oplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\varepsilon_i = \{\pm 2\varepsilon_i \mid 1 \le i \le n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\}$,

$\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \alpha_{n-1} := \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \alpha_n := 2\varepsilon_n\}$,

$\widetilde{\alpha} = 2\varepsilon_1 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n$,

$W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, 作用は B_n の時と同様。

2.9.4 D_n 型

$V := \mathbb{R}^n$,　$\Phi := \{v \in V \mid (v,v) = 2\} \cap \oplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\varepsilon_i = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\}$,

$\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \alpha_{n-1} := \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \alpha_n := \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n\}$,

$\widetilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n$.

$W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$, $\mathfrak{S}_n$ は ε_i の添え字の置換で、$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$ は偶数個の符号変換 $\varepsilon_i \mapsto -\varepsilon_i$ で作用。

2.9.5 G_2 型

$V := \{\sum_{i=1}^{3} a_i \varepsilon_i \mid \sum_{i=1}^{3} a_i = 0\} \subset \mathbb{R}^3$,

$\Phi := \{v \in V \mid (v,v) \in \{2,6\}\} \cap \oplus_{i=1}^{3} \mathbb{Z}\varepsilon_i$

$\quad = \{\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \mid 1 \le i < j \le 3\} \cup \{\pm(2\varepsilon_i - \varepsilon_j - \varepsilon_k) \mid \{i,j,k\} = \{1,2,3\}\}$,　$|\Phi| = 6 + 6 = 12$,

$\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 := -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\}$,　$\widetilde{\alpha} = 2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$.

$W = \mathfrak{D}_6$ は位数 12 の二面体群。

次ページに続く。

[*1] 2017/07/31 版, ver. 0.4.

2.9.6 F_4 型

Φ を定義するのに補助的に格子 $L \subset V$ を導入する。$|\Phi| = 48$ で、長さ 1 のものと 2 のものが 24 個ずつある。

$$
\begin{aligned}
&V := \mathbb{R}^4, \quad L := \oplus_{i=1}^4 \mathbb{Z}\varepsilon_i + \mathbb{Z}(\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i),\\
&\Phi := \{v \in L \mid (v,v) \in \{1,2\}\}\\
&\quad = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le 4\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \le i \le 4\} \cup \{\tfrac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)\},\\
&\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \alpha_2 := \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \alpha_3 := \varepsilon_4, \alpha_4 := \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)\}.\\
&\widetilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4.
\end{aligned}
$$

2.9.7 E_8 型

再び補助的な格子 $L \subset V$ を導入する。$|\Phi| = \binom{8}{2} \cdot 4 + 2^8/2 = 240$ である。

$$
\begin{aligned}
&V := \mathbb{R}^8, \quad L := \{\textstyle\sum_{i=1}^8 c_i\varepsilon_i \mid c_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^8 \varepsilon_i \in 2\mathbb{Z}\} + \mathbb{Z}(\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^8 \varepsilon_i),\\
&\Phi := \{v \in L \mid (v,v) = 2\} = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le 8\} \cup \{\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^8 \pm \varepsilon_i \mid - \text{ が偶数個 }\},\\
&\Delta := \{\alpha_1 := \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8), \alpha_2 := \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \alpha_i := \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_{i-2}\ (3 \le i \le 8)\}.\\
&\widetilde{\alpha} = \varepsilon_7 + \varepsilon_8.
\end{aligned}
$$

2.9.8 E_7 型

Coxeter グラフが E_8 型の部分グラフであることに注意する。$\Delta(\mathrm{E}_8) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_8\} \subset \Phi(\mathrm{E}_8) \subset \mathbb{R}^8$ と E_8 型のルート系および単純ルート集合を書く。$|\Phi| = \binom{6}{2} \cdot 4 + 2 + 2(\binom{6}{1} + \binom{6}{3} + \binom{6}{5}) = 126$ となる。

$$
\begin{aligned}
&V := \mathbb{R}\{\alpha_1, \dots, \alpha_7\} \subset \mathbb{R}^8,\\
&\Phi := \Phi(\mathrm{E}_8) \cap V\\
&\quad = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le 6\} \cup \{\pm(\varepsilon_7 - \varepsilon_8)\} \cup \{\pm\tfrac{1}{2}(\varepsilon_7 - \varepsilon_8 + \textstyle\sum_{i=1}^6 \pm \varepsilon_i) \mid \sum \text{ の中の } - \text{ は奇数個 }\},\\
&\Delta := \{\alpha_1, \dots, \alpha_7\}, \quad \widetilde{\alpha} = \varepsilon_8 - \varepsilon_7.
\end{aligned}
$$

2.9.9 E_6 型

再び E_8 型のルート系および単純ルート集合を使う。$|\Phi| = \binom{5}{2} \cdot 4 + 2(\binom{5}{1} + \binom{5}{3} + \binom{5}{5}) = 72$ となる。

$$
\begin{aligned}
&V := \mathbb{R}\{\alpha_1, \dots, \alpha_6\} \subset \mathbb{R}^8,\\
&\Phi := \Phi(\mathrm{E}_8) \cap V\\
&\quad = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le 5\} \cup \{\pm\tfrac{1}{2}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \textstyle\sum_{i=1}^5 \pm \varepsilon_i) \mid \sum \text{ の中の } + \text{ は奇数個 }\},\\
&\Delta := \{\alpha_1, \dots, \alpha_6\}, \quad \widetilde{\alpha} = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8).
\end{aligned}
$$

レポート問題

レポート問題 1 (10 点)**.** §2.6 の命題を証明せよ。

レポート問題 2 (5 点)**.** §2.7 定理の証明で用いた Coxeter グラフ Z_4 と Z_5 が正でない (即ち付随する対称形式が半正定値でない) ことを確認せよ。

レポート問題 3 (5 点)**.** E_6, E_7, E_8 型ルート系の最高ルート $\widetilde{\alpha}$ を単純ルートの和で書け。また最高ルートであることを確認せよ。

レポート問題 4 (計 15 点)**.** Weyl 群に付随したルート系 $\Phi = \mathrm{A}_n, \dots, \mathrm{G}_2$ について、$\Gamma(\Phi, \Delta)$ が確かに §2.4 の正定値 Coxeter グラフになることを確認せよ。

以上です。