2017 年度前期 代数学 I/代数学概論 V　5 月 18 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

2　有限鏡映群の分類

2.5　半正定値グラフ

定義. **Coxeter グラフ**とは有限グラフの各辺に 3 以上の整数又は ∞ をラベル付けしたものである。

注意. (a) 前回導入した Coxeter 系 (W,S) に付随する Coxeter グラフ $\Gamma(W,S)$ が例である。
(b) 前回 $\Gamma(W,S)$ から行列 $A(W,S)=(a(s,s'))_{s,s'\in S}$ を $a(s,s'):=-\cos(\pi/m(s,s'))$ で定義したのと同様に、Coxeter グラフ Γ に対し実数成分対称行列 $A(\Gamma)$ を定義できる。

定義. n 次対称行列 A が**半正定値** (positive semi-definite) であるとは、対応する $\mathbb{R}^n$ 上の双線形型式が半正定値であること、即ち任意の $x\in\mathbb{R}^n$ について ${}^t xAx\geq 0$ となることを言う。

補題. (前回プリント 2 頁目の)Coxeter グラフ $\widetilde{\mathrm{A}}_{n\geq 1}$, $\widetilde{\mathrm{B}}_{n\geq 2}$, $\widetilde{\mathrm{C}}_{n\geq 2}$, $\widetilde{\mathrm{D}}_{n\geq 4}$, $\widetilde{\mathrm{E}}_{6,7,8}$, $\widetilde{\mathrm{F}}_4$, $\widetilde{\mathrm{G}}_2$ に対応した対称行列は半正定値である。

証明. どのグラフも 1 つ頂点を減らして §2.4 の正定値グラフにできるので、グラフに付随した対称行列の行列式が 0 になることだけ確認すればよい。

$\widetilde{A}_n$ の場合は各行の成分の和が 0 なので行列式は 0 である。他の場合は前節と同様の漸化式 $\det(2A(\widetilde{\mathrm{X}}_n))=2d_{n-1}-4c^2d_{n-2}$ を使えばよい。詳細は省略する。 □

2.6　Coxeter グラフの部分グラフ

定義. Coxeter グラフ Γ が**正** (positive type) であるとは、対応する対称行列 $A(\Gamma)$ が半正定値である時をいう。

定義. Coxeter グラフ Γ の**部分グラフ**とは Γ の頂点とそれにつながっている辺を取り除いたもの、あるいは辺のラベルを減らしたもののこと。

定義. 実数成分の n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ が可約 (reducible または decomposable) であるとは、$\{1,2,\dots,n\}=I\sqcup J$ と空でない集合 I,J に分解できて、$i\in I$ かつ $j\in J$ なら $a_{ij}=0$ となることをいう。可約でない A を既約 (irreducible または indecomposable) であるという。

命題. $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ を半正定値かつ既約な実数成分 $n(\geq 2)$ 次対称正方行列であって、$i\neq j$ なら $a_{ij}\leq 0$ だとする。
(a) $N:=\{x\in\mathbb{R}^n \mid {}^t xAx=0\}$ は $\ker A:=\{y\in\mathbb{R}^n\mid Ay=0\}$ と一致する。また $\dim N=1$.
(b) A の最小固有値は重複度 1 で、その固有ベクトルであって全ての成分が正のものが存在する。

(b) について A は半正定値なのでその固有値は全て非負実数であることに注意。証明はレポート問題 1 にする。

系. 正の連結 Coxeter グラフ Γ の真部分グラフ Γ' に対応した対称行列は正定値である。特に Γ の真部分グラフとして §2.5 のグラフ $\widetilde{\mathrm{A}}_1,\dots,\widetilde{\mathrm{G}}_2$ が現れることはない。

証明. A,A' をそれぞれ Γ,Γ' に付随した対称行列とする。$A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$, $A'=(a'_{ij})_{i,j=1}^k$, $k\leq n$ とおける。また辺のラベルは $m_{ij}\geq m'_{ij}\geq 3$ とおけるから $a'_{ij}=-\cos(\pi/m'_{ij})\geq-\cos(\pi/m_{ij})=a_{ij}$.

[*1] 2017/07/31 版, ver. 0.5.

A' が正定値でないなら ${}^t x' A' x' \leq 0$ となる $x' \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ が存在する。${}^t x' = (x_1, \ldots, x_k)$ として $x \in \mathbb{R}^n$ を ${}^t x := (|x_1|, \ldots, |x_k|, 0, \ldots, 0)$ で定める。x での正定値対称形式 A の値を考えると

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} \, |x_i| \, |x_j| \leq \sum_{i,j=1}^{k} a'_{ij} \, |x_i| \, |x_j| \leq \sum_{i,j=1}^{k} a'_{ij} x_i x_j \leq 0.$$

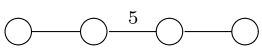
ここで 3 番目の不等号は $a'_{ij} \leq 0$ から従う。よってどの和も 0 であり、特に ${}^t x A x = 0$. 上の命題 (a) から $Ax = 0$ となり、0 は A の固有値であり、更にその固有空間は 1 次元だから $\mathbb{R}x$ である。命題 (b) から最小固有値が 0 となり、x の成分は全て正にできる。つまり $k = n$. すると上記の 2 番目の等式から全ての i, j について $a_{ij} = a'_{ij}$. これは Γ' が真部分グラフであることと矛盾する。 □

2.7　正の Coxeter グラフの分類

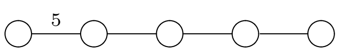
定理. 正の連結 Coxeter グラフは §2.4 と §2.5 にあげたもので尽くされる。

証明. Γ を正の Coxeter グラフとし、n を Γ の頂点の数、m を辺のラベルの最大値とする。

1. 頂点数が 1 または 2 の Coxeter グラフは A_1, $\mathrm{I}_2(m)$, $\widetilde{\mathrm{A}}_1$ だけでこれらは正。以下 $n \geq 3$ とする。
2. §2.6 系より $\widetilde{\mathrm{A}}_1$ は Γ の部分グラフになりえないので $m < \infty$ として良い。
3. §2.6 系より $\widetilde{\mathrm{A}}_n$ は部分グラフでないので Γ にループはない。
   3.1. $m = 3$ と仮定する。$\Gamma \neq \mathrm{A}_n$ としてよい。すると Γ は分岐を持つ。
   3.2. §2.6 系より $\widetilde{\mathrm{D}}_{n>4}$ は Γ の部分グラフでないので分岐は 1 か所しかない。
   3.3. $\widetilde{\mathrm{D}}_4$ も部分グラフでないので分岐は 3 分岐である。各分岐にある頂点の数を $a \leq b \leq c$ とする。
   3.4. $\widetilde{\mathrm{E}}_6$ は部分グラフではないので $a = 1$.
   3.5. $\widetilde{\mathrm{E}}_7$ は部分グラフではないので $b \leq 2$
   3.6. $\Gamma \neq \mathrm{D}_{n \geq 4}$ としてよい。よって $b = 2$.
   3.7. $\widetilde{\mathrm{E}}_8$ は部分グラフではないので $c \leq 4$. すると $\Gamma = \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8$.
4. $m \geq 4$ と仮定する。$\widetilde{\mathrm{C}}_{n \geq 2}$ は部分グラフでないのでラベルが > 3 となる辺は 1 つのみ。また $\widetilde{\mathrm{B}}_{n \geq 3}$ は部分グラフでないので Γ は分岐を持たない。
   4.1. $m = 4$ と仮定する。$\Gamma \neq \mathrm{B}_n$ としてよい。よって (2 本ある) 終端の辺のラベルは 3.
   4.2. $\widetilde{\mathrm{F}}_4$ は部分グラフでないので $n = 4$. すると $\Gamma = F_4$.
5. $m \geq 5$ の場合、$\widetilde{\mathrm{G}}_2$ が部分グラフでないことから $m = 5$.
6. 下記の Coxeter グラフ Z_4 は正ではないので Γ の部分グラフではない。よってラベル 5 の辺は終端にある。

Z_4 

7. 下記の Coxeter グラフ Z_5 は正ではないので Γ の部分グラフではない。よって $n \leq 4$. すると $\Gamma = \mathrm{H}_3, \mathrm{H}_4$.

Z_5 

□

以上で有限鏡映群 W から現れる Coxeter グラフ $\Gamma(W, \Delta)$ が分類できた。そこでこれからは、与えられた正の連結 Coxeter グラフ Γ に対し $\Gamma = \Gamma(W, \Delta)$ となるような鏡映群 W を構成することを考える。

2.8　Weyl 群

V を Euclid 空間とする。以下ルート系といったら V 上のものを考える。

定義. (1) ルート系 Φ は次の条件を満たすとき結晶的 (crystallographic) であるという。

$$\text{(R3)} \qquad \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z} \quad (\forall \alpha, \beta \in \Phi)$$

(2) 結晶的ルート系 Φ に付随した有限鏡映群 $W(\Phi)$ を (有限)**Weyl 群**という。

注意. §1.2 で注意したように、今まで扱ってきた 2 条件 (R1),(R2) で定義されるルート系は Lie 理論に現れるものとは違う。結晶的ルート系、つまり **3 条件 (R1)–(R3) で定義されるものが通常ルート系と呼ばれる**ものである。

鏡映の作用 $s_\alpha v = v - 2(\alpha, v)/(\alpha,\alpha)\cdot\alpha$ より次の補題が成り立つ。

補題. Φ を結晶的ルート系、$\Delta \subset \Phi$ を単純ルート集合とすると $\Phi \subset \mathbb{Z}\Delta$. また $\mathbb{Z}\Delta \subset V$ は $W(\Phi)$ の作用で不変。

系. Φ を結晶的ルート系とすると任意の $w \in W(\Phi)$ について $\mathrm{tr}_V(w) \in \mathbb{Z}$.

証明. Δ を含む V の基底をとることができる。$\mathbb{R}\Delta \subset V$ の直交補空間への $W(\Phi)$ の作用は自明だから $\mathrm{tr}_V(w) = \mathrm{tr}_{\mathbb{R}\Delta}(w) + \dim V - \dim \mathbb{R}\Delta$. 補題より $w|_{\mathbb{R}\Delta} \in O(\mathbb{R}\Delta)$ を基底 Δ で行列表示すれば成分は全て整数。よって $\mathrm{tr}_{\mathbb{R}\Delta}(w)$ も整数。 □

命題. Φ を結晶的ルート系、$\Delta \subset \Phi$ をその単純ルート集合とする。任意の $\alpha, \beta \in \Delta$ について $\alpha \neq \beta$ なら

$$m(\alpha, \beta) \in \{2, 3, 4, 6\}.$$

証明. $\alpha \neq \beta$ より $s_\alpha s_\beta \in W(\Phi)$ は $s_\alpha s_\beta \neq 1$ であり、平面 $\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta \subset V$ 上に回転で作用し、直交補空間には自明に作用する。回転の角度は $\theta := 2\pi/m(\alpha,\beta)$. よって適当に V の基底をとって $\mathrm{tr}_V(s_\alpha s_\beta) = 2\cos\theta + \dim V - 2$. すると上の系より $2\cos\theta \in \mathbb{Z}$. これから $\cos\theta = -1, -1/2, 0, 1/2$. □

例. この命題から H_3, H_4 および $m \neq (1, 2,)3, 4, 6$ の $\mathrm{I}_2(m)$ は結晶的ではない。

注意. 以下 $\mathrm{G}_2 := \mathrm{I}_2(6)$ と書く。なお $\mathrm{I}_2(3) = \mathrm{A}_2$, $\mathrm{I}_2(4) = \mathrm{B}_2$ に注意。

2.9 Weyl 群に付随したルート系

前節の最後の例 (および注意) とは逆に

定理. §2.4 の正定値な Coxeter グラフのうち、$\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{D}_n, \mathrm{E}_{6,7,8}, \mathrm{F}_4, \mathrm{G}_2$ は Weyl 群に対応する。

上述の Coxeter グラフ Γ から上手くルート系の実現 $\Phi \subset V$ を探してきて、それが結晶的であることを確認すればよい。

$\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{D}_n$ については §1.1 の例で説明したことが欲しいルート系の実現になっている。これらの復習から定理の証明を始める。

注意. (1) B_n 型 Coxeter グラフには 2 つの結晶的ルート系 B_n と C_n が対応する。C_n も以下で説明する。

(2) $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$ は**古典型ルート系**、$\mathrm{E}_{6,7,8}, \mathrm{F}_4, \mathrm{G}_2$ は**例外型ルート系**と呼ばれる。

また後で必要になる最高ルートについても説明していく。

定義. (1) 結晶的ルート系 $\Phi \subset V$ と単純ルート集合 $\Delta \subset \Phi$ について、V 上の半順序 $\geq$ を以下で定義する。

$$\lambda \geq \mu \overset{\mathrm{dfn}}{\iff} \lambda - \mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Delta.$$

(2) Φ において半順序 $\geq$ で最大となる元を**最高ルート**と呼ぶ。

注意. Φ が §2.2 の意味で既約なら最高ルートが存在することが知られている。以下ではそれを $\widetilde{\alpha} \in \Phi$ とかく。

2.9.1 A_n 型

$V \supset \Phi \supset \Delta$ を次のように定める。最高元 $\widetilde{\alpha}$ と W およびその V への作用も記す。

$V := \{\sum_{i=1}^{n+1} a_i\varepsilon_i \mid \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$,

$\Phi := \{v \in V \mid (v, v) = 2\} \cap \oplus_{i=1}^{n+1}\mathbb{Z}\varepsilon_i = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$,

$\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \alpha_n := \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}\}$,
$\widetilde{\alpha} = \varepsilon_1 - \varepsilon_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$,
$W = \mathfrak{S}_{n+1}$, ε_i の添え字の置換で V に作用。

2.9.2　B_n 型

Φ は長さの 2 乗が 1 のものが $2n$ 個、2 のものが $2n(n-1)$ 個で計 $2n^2$ 個ある。

$V := \mathbb{R}^n$,
$\Phi := \{v \in V \mid (v,v) \in \{1,2\}\} \cap \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i$
$\quad = \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \le i \le n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\}$,
$\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \alpha_{n-1} := \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \alpha_n := \varepsilon_n\}$
$\widetilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{n-1} + 2\alpha_n$,
$W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, $\mathfrak{S}_n$ は ε_i の添え字の置換で、$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ は $\varepsilon_i \mapsto -\varepsilon_i$ で作用。

2.9.3　C_n 型

C_n 型ルート系は B_n 型の "双対"である。

$V := \mathbb{R}^n$,
$\Phi := \{v \in V \mid (v,v) \in \{2,4\}\} \cap \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i = \{\pm 2\varepsilon_i \mid 1 \le i \le n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\}$,
$\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \alpha_{n-1} := \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \alpha_n := 2\varepsilon_n\}$,
$\widetilde{\alpha} = 2\varepsilon_1 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n$,
$W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, 作用は B_n の時と同様。

2.9.4　D_n 型

$V := \mathbb{R}^n$,
$\Phi := \{v \in V \mid (v,v) = 2\} \cap \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\}$,
$\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \alpha_{n-1} := \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \alpha_n := \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n\}$,
$\widetilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n$.
$W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$, $\mathfrak{S}_n$ は ε_i の添え字の置換で、$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$ は偶数個の符号変換 $\varepsilon_i \mapsto -\varepsilon_i$ で作用。

2.9.5　G_2 型

例外型ルート系の実現は古典型に比べるとあまり "自然"には見えない。例えば $\mathrm{G}_2 = \mathrm{I}_2(6)$ だが、§1.1 で述べた二面体群のルート系の実現は条件 (R3) と相性が悪い。下記の実現が知られている。$|\Phi| = 6 + 6 = 12$ である。

$V := \{\sum_{i=1}^3 a_i\varepsilon_i \mid \sum_{i=1}^3 a_i = 0\} \subset \mathbb{R}^3$,
$\Phi := \{v \in V \mid (v,v) \in \{2,6\}\} \cap \oplus_{i=1}^3 \mathbb{Z}\varepsilon_i$
$\quad = \{\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \mid 1 \le i < j \le 3\} \cup \{\pm(2\varepsilon_i - \varepsilon_j - \varepsilon_k) \mid \{i,j,k\} = \{1,2,3\}\}$,
$\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 := -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\}$,
$\widetilde{\alpha} = 2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$.
$W = \mathcal{D}_6$ は位数 12 の二面体群。

2.9.6　F_4 型

Φ を定義するのに補助的に格子 $L \subset V$ を導入する。$|\Phi| = 48$ で、長さの 2 乗が 1 のものと 2 のものが 24 個ずつある。

$V := \mathbb{R}^4$,
$L := \oplus_{i=1}^4 \mathbb{Z}\varepsilon_i + \mathbb{Z}(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i)$,
$\Phi := \{v \in L \mid (v,v) \in \{1,2\}\}$

$= \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le 4\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \le i \le 4\} \cup \{\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)\}$,
$\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \alpha_2 := \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \alpha_3 := \varepsilon_4, \alpha_4 := \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)\}$.
$\widetilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$.

2.9.7　E_8 型

再び補助的な格子 $L \subset V$ を導入する。$|\Phi| = 240$ である。

$V := \mathbb{R}^8$,
$L := \{\sum_{i=1}^{8} c_i\varepsilon_i \mid c_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^{8}\varepsilon_i \in 2\mathbb{Z}\} + \mathbb{Z}(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}\varepsilon_i)$,
$\Phi := \{v \in L \mid (v, v) = 2\} = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le 8\} \cup \{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \pm \varepsilon_i \mid -$ が偶数個 $\}$,
$\Delta := \{\alpha_1 := \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8), \alpha_2 := \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \alpha_i := \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_{i-2}\ (3 \le i \le 8)\}$.
$\widetilde{\alpha} = \varepsilon_7 + \varepsilon_8$.

2.9.8　E_7 型

Coxeter グラフが E_8 型の部分グラフであることに注意する。$\Delta(\mathrm{E}_8) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_8\} \subset \Phi(\mathrm{E}_8) \subset \mathbb{R}^8$ と E_8 型のルート系および単純ルート集合を書く。$|\Phi| = 126$.

$V := \mathbb{R}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_7\} \subset \mathbb{R}^8$,
$\Phi := \Phi(\mathrm{E}_8) \cap V$
$= \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le 6\} \cup \{\pm(\varepsilon_7 - \varepsilon_8)\} \cup \{\pm\frac{1}{2}(\varepsilon_7 - \varepsilon_8 + \sum_{i=1}^{6} \pm \varepsilon_i) \mid \sum$ の中の $-$ は奇数個 $\}$,
$\Delta := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_7\}$,
$\widetilde{\alpha} = \varepsilon_8 - \varepsilon_7$.

2.9.9　E_6 型

再び E_8 型のルート系および単純ルート集合を使う。$|\Phi| = 72$.

$V := \mathbb{R}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_6\} \subset \mathbb{R}^8$,
$\Phi := \Phi(\mathrm{E}_8) \cap V$
$= \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le 5\} \cup \{\pm\frac{1}{2}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \sum_{i=1}^{5} \pm \varepsilon_i) \mid \sum$ の中の $+$ は奇数個 $\}$,
$\Delta := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_6\}$,
$\widetilde{\alpha} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8)$.

参考文献

James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge の §§2.6–2.10.

以上です。