2017 年度前期 代数学 I/代数学概論 V　5 月 11 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

1 有限鏡映群

前回と同様、Euclid 空間 V とそのルート系 Φ を固定し、$W = W(\Phi)$ を付随する有限鏡映群とする。

1.10 放物部分群

定義. (1) Φ の単純ルート集合 Δ を固定する。$S := \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ を単純鏡映からなる W の部分**集合**とする。部分集合 $I \subset S$ に対し W_I を $s_\alpha \in I$ 達で生成される W の部分群とする。また $\Delta_I := \{\alpha \in \Delta \mid s_\alpha \in I\}$ と定める。
(2) wW_Iw^{-1} ($I \subset S$, $w \in W$) と書ける W の部分群を W の**放物部分群** (parabolic subgroup) と呼ぶ。

例. $W_\emptyset = \{1\}$, $W_S = W$.

命題. Φ の単純ルート集合 Δ を固定し対応する単純鏡映の集合を S と書く。$I \subset S$ に対し $V_I \subset V$ を Δ_I のはる ($\mathbb{R}$ 上の線形) 部分空間とし、$\Phi_I := \Phi \cap V_I$ と定める。また W の Δ に関する長さ関数を ℓ と書く。
(a) Φ_I は V 上の [及び V_I 上の] ルート系。Δ_I は Φ_I の単純ルート集合であり対応する鏡映群は $W(\Phi_I) = W_I$. また Φ_I は V_I 上のルート系でもあり対応する鏡映群は $W(\Phi_I) = W_I|_{V_I}$.
(b) $W_I = W(\Phi_I)$ の単純ルート集合 Δ_I に関する長さ関数を ℓ_I とすると、W_I 上では $\ell_I = \ell$.
(c) $W^I := \{w \in W \mid \ell(ws) > \ell(w)\ \forall s \in I\}$ とする。任意の $w \in W$ に対し $w = uv$ となる $u \in W^I$, $v \in W_I$ が唯一存在する。この時長さに関して $\ell(w) = \ell(u) + \ell(v)$ となっていて、また u は wW_I の中で最も短い唯一の元でもある。

証明. (a) 易しいので省略。
(b) Π を Δ を含む Φ の正ルート集合とすると §1.7 の定理より $w \in \Pi$ について $\ell(w) = |\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)|$. また $\Pi_I := \Pi \cap \Phi_I$ とすれば $w \in W_I$ について $\ell_I(w) = |\Pi_I \cap w^{-1}(-\Pi_I)|$. $\alpha \in \Pi \setminus \Phi_I$ を単純ルートの線形結合で書けばある $\gamma \in \Delta \setminus \Delta_I$ が含まれる。よって任意の $\beta \in \Delta_I$ について $s_\beta\alpha$ は γ を正の係数付きで含む。これは $s_\beta\alpha > 0$ を意味する。よって任意の $w \in W_I$ について $w\alpha > 0$. 従って $w \in W_I$ について $\Pi_I \cap w^{-1}(-\Pi_I) = \Pi \cap w^{-1}(-\Pi)$. 再び §1.7 より $\ell_I(w) = \ell(w)$.
(c) $w \in W$ に対し $u \in wW_I$ であって最短長のものを一つ取る。するとある $v \in W_I$ で $w = uv$ と書ける。任意の $s \in I$ について $us \in wW_I$ だから $u \in W^I$. この u, v の簡約表示を $u = s_1 \cdots s_p$, $v = s'_1 \cdots s'_q$ とする。(b) より $s'_i in I$ として良い。この時 $\ell(w) \le \ell(u) + \ell(v)$. もし $\ell(w) < \ell(u) + \ell(v)$ なら、§1.7 より $uv = s_1 \cdots s_p s'_1 \cdots s'_q$ から 2 つ単純鏡映を取り除くことができる。しかし u の取り方から $s_1, \dots, s_p$ からは 1 つも取り除けない。よって $s'_1 \dots, s'_q$ から取り除くことになるが、これは v の簡約表示を取ったことに反する。以上より $\ell(w) = \ell(u) + \ell(v)$ である。

もし u とは別の最短長の元 $u' \in wW_I$ があったとしたら $u' = ux$, $\ell(x) =: r > 0$ と書ける。$x = s_1 \cdots s_r$ ($s_i \in I$) と簡約表示すると $\ell(u's_r) < \ell(u')$ となり $u' \in W^I$ に反する。 □

1.11 Poincaré 多項式

定義. 有限鏡映群 W の部分集合 X に対し $X(t) := \sum_{w \in X} t^{\ell(w)}$ を X の **Poincaré 多項式**と呼ぶ。特に

$$W(t) = \sum_{w \in W} t^{\ell(w)} = \sum_{n \ge 0} |\{w \in W \mid \ell(w) = n\}| t^{\ell(w)}.$$

[*1] 2017/05/18 版, ver. 0.4.

例. $W = \mathfrak{S}_3$ なら $W(t) = 1 + 2t + 2t^2 + t^3$.

命題. Φ の単純ルート集合 Δ を固定し $S := \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\} \subset W$ とする。
(a) 任意の部分集合 $I \subset S$ について $W(t) = W_I(t)W^I(t)$.
(b) Δ を含む正ルート集合を Π とすると

$$\sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} \frac{W(t)}{W_I(t)} \;=\; \sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} W^I(t) \;=\; t^{|\Pi|}.$$

証明. (a) §1.10 の命題 (c) から従う。
(b) 最初の等号は (a) から従う。各 $w \in W$ の中辺への寄与を考える。$K_w := \{s \in S \mid \ell(ws) > \ell(w)\}$ とすれば $w \in W^I \iff I \subset K_w$. よって中辺における $t^{\ell(w)}$ の係数は $\sum_{I \subset K_w} (-1)^{|I|}$. $K_w \neq \emptyset$ なら $\sum_{I \subset K_w} (-1)^{|I|} = (1-1)^{|K_w|} = 0$. $K_w = \emptyset$ は $w = w_\circ$ と同値で §1.8 より $t^{\ell(w_\circ)} = t^{|\Pi|}$. 以上より 2 番目の等号を得る。 □

系. 上の命題と同じ記号のもとで

$$\sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} \frac{|W|}{|W_I|} \;=\; 1.$$

証明. 命題 (b) で $t = 1$ とし $X(1) = |X|$ に注意すればよい。 □

2　有限鏡映群の分類

2.1　Coxeter グラフと鏡映群の同型類

§1.9 までの議論により、有限鏡映群 W は単純ルート $\alpha \in \Delta$ に対応した単純鏡映 s_α 達を生成系とし、関係式が整数の集合 $\{m(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \Delta\}$ で決定されるが分かった。この集合を表すグラフが Coxeter グラフである。この概念は一般の Coxeter 系に対して定義できる。

定義. **Coxeter 系** (W, S) とは群 W と有限生成系 $S \subset W$ の組であって関係式が

$$(ss')^{m(s,s')} \;=\; 1 \;(s, s' \in S), \quad m(s, s') \begin{cases} = 1 & s = s' \\ \geq 2 & s \neq s' \end{cases}$$

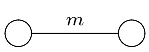
となっているものをいう。但し s と s' に関係がない場合は $m(s, s') = \infty$ と約束する。

例. §1.9 より有限鏡映群 $W = W(\Phi)$ と単純ルート集合 $\Delta \subset \Phi$ の組 (W, Δ) は Coxeter 系とみなせる。この場合は常に $m(\alpha, \beta) < \infty$ $(\alpha, \beta \in \Delta)$ である。

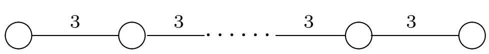
定義. Coxeter 系 (W, S) の **Coxeter グラフ** $\Gamma = \Gamma(W, S)$ とは、生成系 S を頂点集合とし、$m(s, s') \geq 3$ なる $s \neq s' \in S$ の間に $m(s, s')$ とラベル付けされた辺を持つグラフのことである。

Coxeter グラフの異なる 2 頂点 $s \neq s' \in S$ について、それらを結ぶ辺がなければ $m(s, s') = 2$ であることに注意する。

例. (1) 二面体群 $\mathcal{D}_m$ は 2 元からなる単純ルート集合 $\Delta = \{\alpha, \beta\}$ を持つ。Coxeter グラフ $\Gamma(\mathcal{D}_m, \Delta)$ は



(2) 対称群 $\mathfrak{S}_n$ と単純ルート集合 $\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n\}$ について、Coxeter グラフは $n - 1$ 個の頂点を持つ以下のようなグラフである。



次の命題の証明は難しくないので省略する。

命題 (Humphreys, §2.1, Proposition)**.** W_1, W_2 を Euclid 空間 V_1, V_2 に作用する有限鏡映群であってそれぞれ固定点を持たないものとする。もし両者の Coxeter グラフが等しければ、V_1 から V_2 への等長変換が存在して W_1 から W_2 への同型が誘導される。

2.2 Coxeter 系の既約成分

定義. Coxeter 系 (W, S) は Coxeter グラフ $\Gamma(W)$ が連結なとき**既約**であるという。

次の命題の証明は (前節のものと違い) 準備が必要なので、一旦省略する。(時間があれば後で概略を紹介する。)

命題. Coxeter 系 (W, S) の Coxeter グラフ Γ が連結成分 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ を持つものとする。$S_1, \ldots, S_r \subset S$ を対応する部分集合とする。このとき W は放物部分群 $W_{S_1}, \ldots, W_{S_r} \leq W$ の直積と同型。また Coxeter 系 (W_{S_i}, S_i) はどれも既約。

2.3 Coxeter グラフと双線形型式

定義. (W, S) を Coxeter 系とする。正方行列 $A(W, S) = (a(s, s'))_{s, s' \in S}$ を次のように定める。

$$a(s, s') := -\cos \frac{\pi}{m(s, s')}$$

注意. $A(W, S)$ は対称行列である。また $A(W, S)$ は Coxeter グラフ $\Gamma(W, S)$ からも決めることができる。

一般に n 次対称行列 A が**正定値** (positive definite) であるとは、対応する $\mathbb{R}^n$ 上の双線形型式 $(x, y) \mapsto {}^t xAy$ が正定値であること、即ち任意の $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ について ${}^t xAx > 0$ となることを言う。

補題. 有限鏡映群 $W = W(\Phi)$ と単純ルート集合 $\Delta \subset \Phi$ から定まる Coxeter 系 (W, Δ) について、対称行列 $A(W, \Delta)$ は正定値。

証明. V を W の作用する Euclid 空間とすると、$A(W, \Delta)$ は V の基底 Δ に関する V の Euclid 内積の表現行列である。Euclid 内積は正定値な双線形型式だから $A(W, \Delta)$ も正定値である。 $\square$

また n 次対称行列 A が**半正定値** (positive semi-definite) であるとは、対応する $\mathbb{R}^n$ 上の双線形型式が半正定値であること、即ち任意の $x \in \mathbb{R}^n$ について ${}^t xAx \geq 0$ となることを言う。

定義. Coxeter 系 (W, S) が**正** (positive type) であるとは $A(W, S)$ が半正定値である時をいう。

2.4 正定値グラフ

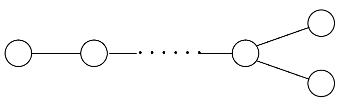
これ以降 Coxeter グラフの辺のラベルが 3 の場合はラベルを省略する。

補題. 以下の Coxeter グラフに対応した対称行列は正定値である。

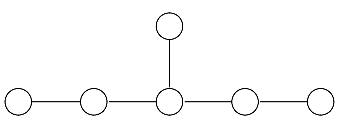
A_n $(n \geq 1)$

B_n $(n \geq 2)$

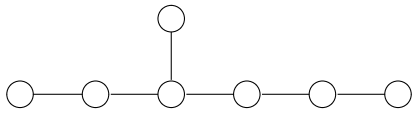
D_n $(n \geq 4)$



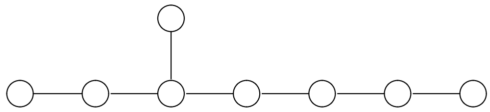
E_6



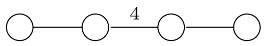
E_7



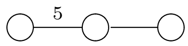
E_8



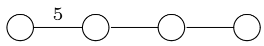
F_4



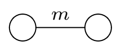
H_3



H_4



$\mathrm{I}_2(m)$



証明. 対称行列 A が正定値であることと A の主小行列式 (principal minor) が全て正であることが同値なことを思い出す。そこで各 X_n 型グラフに対応した行列 $A(\mathrm{X}_n)$ の主小行列式を計算していく。$A(\mathrm{X}_n)$ のサイズ、即ち頂点の数は n である。$n \leq 2$ の場合は

$$A(\mathrm{A}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(\mathrm{B}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad A(\mathrm{I}_2(m)) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos(\pi/m) \\ -\cos(\pi/m) & 1 \end{pmatrix}$$

となっていて、どれも正定値であることが分かる。

$n \geq 3$ の場合、D_4 を除いて帰納的に議論できる。D_4 が正定値であることは

$$A(\mathrm{D}_4) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & c & & \\ c & 1 & c & c \\ & c & 1 & \\ & c & & 1 \end{pmatrix}, \quad c = -1/2$$

より直接確認できるので省略する。D_4 以外の場合、頂点の番号付けを工夫して以下の条件を満たすようにできる: i 番目の頂点を v_i と書くと、v_n は v_{n-1} だけと結ばれていて、v_{n-1} 番目の頂点は v_n と v_{n-2} だけと結ばれている。更に v_n と v_{n-1} を結ぶ辺のラベルは $m = 3$ または 4。具体的には、X_n 型から v_n を除いたものを Y_{n-1} 型、Y_{n-1} 型から v_{n-1} を除いたものを Z_{n-2} 型とすると $(\mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_{n-1}, \mathrm{Z}_{n-2})$ の組み合わせは以下の通り。

X_n	$\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n$	D_5	$\mathrm{D}_{n\geq 6}$	E_n	F_4	H_3	H_4
Y_{n-1}	A_{n-1}	D_4	D_{n-1}	D_{n-1}	B_3	$\mathrm{I}_2(5)$	H_3
Z_{n-2}	A_{n-2}	A_3	D_{n-2}	A_{n-2}	A_2	A_1	$\mathrm{I}_2(5)$

また $c := -\cos(\pi/m)$ と書くと $A(\mathrm{X}_n)$ は次のような形をしている。

$$A(\mathrm{X}_n) \;=\; \left(\begin{array}{c|c} A(\mathrm{Y}_{n-1}) & \begin{matrix} \\ c \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} & c \end{matrix} & 1 \end{array}\right)$$

従って $2A(\mathrm{X}_n)$ の i 次主行列式を d_i と書くと

$$\det(2A(\mathrm{X}_n)) \;=\; 2d_{n-1} - 4c^2 d_{n-2} \;=\; 2\det(2A(\mathrm{Y}_{n-1})) - 4c^2 \det(2A(\mathrm{Z}_{n-2}))$$

となる。$m = 3, 4$ より $4c^2 = 1, 2$ であることに注意してこの漸化式を解くと、結果は以下のようになる。

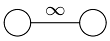
X_n	A_n	B_n	D_n	E_n	F_4	H_3	H_4	$\mathrm{I}_2(m)$
$\det(2A(\mathrm{X}_n))$	$n+1$	2	4	$9-n$	1	$3-\sqrt{5}$	$(7-3\sqrt{5})/2$	$4\sin^2(\pi/m)$

但し $\cos\pi/5 = (1+\sqrt{5})/4$ を用いた。これで $\det A(\mathrm{X}_n) > 0$ が確認できた。また議論が帰納的なので、主小行列式も全て正であることが証明できている。 $\square$

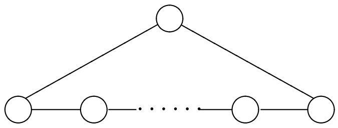
2.5 半正定値グラフ

補題. 以下の Coxeter グラフに対応した対称行列は半正定値である。

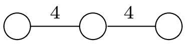
$\widetilde{A}_1$



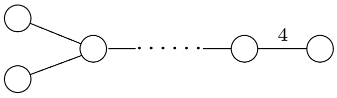
$\widetilde{\mathrm{A}}_n$ $(n \geq 2)$



$\widetilde{\mathrm{B}}_2 = \widetilde{\mathrm{C}}_2$

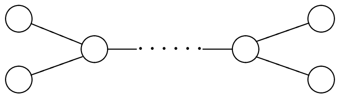


$\widetilde{\mathrm{B}}_n$ $(n \geq 3)$

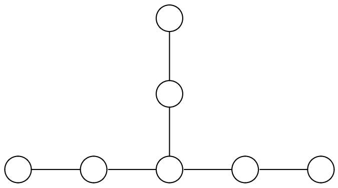


$\widetilde{\mathrm{C}}_n$ $(n \geq 3)$

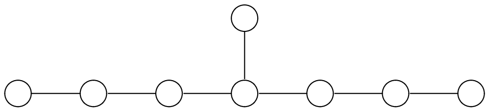
$\widetilde{\mathrm{D}}_n$ $(n \geq 4)$



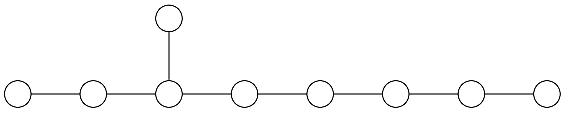
$\widetilde{\mathrm{E}}_6$



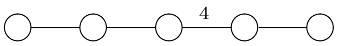
$\widetilde{\mathrm{E}}_7$



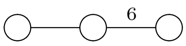
$\widetilde{\mathrm{E}}_8$



$\widetilde{\mathrm{F}}_4$



$\widetilde{\mathrm{G}}_2$



証明. どのグラフも 1 つ頂点を減らして §2.4 の正定値グラフにできるので、グラフに付随した対称行列の行列式が 0 になることだけ確認すればよい。

$\widetilde{A}_n$ の場合は各行の成分の和が 0 なので行列式は 0 である。

他の場合は前節と同様の漸化式

$$\det(2A(\widetilde{\mathrm{X}}_n)) = 2d_{n-1} - 4c^2 d_{n-2}$$

を使えばよい。詳細は省略する。 □

実は次の定理が成立する。証明は次回の前半で与える。

定理. 連結な Coxeter グラフで正のものは §2.4 と §2.5 であげたもので尽くされる。

参考文献

James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge の §§2.1–2.7.

以上です。