2017 年度前期 代数学 I/代数学概論 V　4 月 27 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

1　有限鏡映群

前回に引き続き実 Euclid 空間 V とそのルート系 Φ を固定する。$W = W(\Phi)$ を付随する有限鏡映群とする。

1.6　長さ関数

前節 §1.5 の結果から有限鏡映群 W は単純鏡映で生成されることが分かった。実はこの生成系に関する W の関係式が明示的に求まる (§1.9)。今後暫くはその準備をしていく。

定義. Δ を Φ の単純ルート集合とする。$w \in W$ の (Δ に関する) **長さ** (length) $\ell(w)$ とは

$$w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r} \quad (\alpha_i \in \Delta)$$

と単純鏡映の積で書いたときの r の最小値のこと。またこの最小値を与えるような表示 $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{\ell(w)}}$ のことを w の**簡約表示** (reduced expression) という。

注意. $\ell(w) = 0 \iff w = 1_W$ 及び $\ell(w) = 1 \iff w = s_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$ は明らか。また任意の $w \in W$ に対し $\ell(w) = \ell(w^{-1})$. 実際 $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$ なら $w^{-1} = s_{\alpha_r} \cdots s_{\alpha_1}$ なので $\ell(w^{-1}) \le \ell(w)$. 逆の不等号も同様。

$\ell(w)$ を正ルート集合に関する量で表すことができる。次に定義する $n(w)$ がそれである。

定義. Δ を含む正ルート集合を Π とする。$w \in W$ に対し

$$n(w) := \left|\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)\right|.$$

次節で実は $n(w) = \ell(w)$ であることを示す。そのためにいくつか準備をする。

補題. [*2]$\alpha \in \Delta$, $w \in W$ について
(a) $w\alpha > 0$ なら $n(ws_\alpha) = n(w) + 1$.
(b) $w\alpha < 0$ なら $n(ws_\alpha) = n(w) - 1$.
(c) $w^{-1}\alpha > 0$ なら $n(s_\alpha w) = n(w) + 1$.
(d) $w^{-1}\alpha < 0$ なら $n(s_\alpha w) = n(w) - 1$.

証明. $\Pi(w) := \Pi \cap w^{-1}(-\Pi)$ とおく。特に $n(w) = |\Pi(w)|$. §1.4 命題より、もし $w\alpha > 0$ なら $\Pi(ws_\alpha) = s_\alpha \Pi(w) \sqcup \{\alpha\}$. これから (a) が従う。また $w\alpha < 0$ なら $s_\alpha \Pi(ws_\alpha) = \Pi(w) \setminus \{\alpha\}$ かつ $\alpha \notin \Pi(w)$. よって (b) が成立する。(c) と (d) は (a) と (b) で w を w^{-1} に置き換えて $n(w^{-1}a_\alpha) = n(s_\alpha w)$ を使うと分かる。 □

系. $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$ と r 個の単純鏡映の積でかけるならば $n(w) \le r$. 特に $n(w) \le \ell(w)$.

証明. 上の補題より単純鏡映をかけていく度に関数 n の値は高々 1 しか増えない。 □

1.7　簡約表示

定理. 単純ルート集合 Δ を固定する。$w \in W$ が $w = s_1 \cdots s_r$ と単純鏡映 $s_i = s_{\alpha_i}$ 達の積で表されているとする。もし $n(w) < r$ なら $1 \le i < j \le r$ であって以下の条件を満たすものが存在する。

[*1] 2017/06/17 版, ver. 0.5.
[*2] **ver. 0.3 では (c) と (d) に誤りがありました。**

(a) $\alpha_i = (s_{i+1} \cdots s_{j-1})\alpha_j$,
(b) $s_{i+1}s_{i+2} \cdots s_j = s_i s_{i+1} \cdots s_{j-1}$,
(c) $w = s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots \widehat{s_j} \cdots s_r$. 但し $\widehat{s_i}$ は i 番目の項を除くことを意味する。

証明. (a) $n(w) < r$ と §1.6 補題 (a), (b) の繰り返しにより、ある $j \le r$ があって $s_1 \cdots s_{j-1}\alpha_j < 0$. しかし $\alpha_j > 0$ だからある $i < j$ があって $s_{i+1} \cdots s_{j-1}\alpha_j > 0$ かつ $s_i(s_{i+1} \cdots s_{j-1}\alpha_j) < 0$. §1.4 命題を s_i に適用して、s_i の作用で負になる正ルート $(s_{i+1} \cdots s_{j-1})\alpha_j$ は α_i だと分かる。
(b) $\alpha := \alpha_j$, $w' := s_{i+1} \cdots s_{j-1}$ とする。(a) より $w'\alpha = \alpha_i$ なので、§1.2 命題より $w' s_\alpha {w'}^{-1} = s_{w'\alpha} = s_i$. つまり $(s_{i+1} \cdots s_{j-1})s_j(s_{j-1} \cdots s_{i+1}) = s_i$. これから結論を得る。
(c) は (b) から直ちに従う。 □

系. 任意の $w \in W$ について $n(w) = \ell(w)$.

証明. §1.6 系より $n(w) \le \ell(w)$. もし $n(w) < \ell(w) = r$ なら $w = s_1 \cdots s_r$ と書いたときに上の定理 (c) から w は $r-2$ 個の単純鏡映の積で書けるので $\ell(w) = r$ に反する。 □

1.8　単純推移性と最長元

前節 §1.7 の系から直ちに以下が従う。

定理. $\Delta \subset \Phi$ を単純ルート集合、$\Pi \supset \Delta$ を付随する正ルート集合とする。$w \in W$ に関する以下の 5 条件は同値。

$$\text{(a) } w\Pi = \Pi, \quad \text{(b) } w\Delta = \Delta, \quad \text{(c) } n(w) = 0, \quad \text{(d) } \ell(w) = 0, \quad \text{(e) } w = 1.$$

系. $\Delta \subset \Phi$ を単純ルート集合、Π をそれに付随する正ルート集合とする。
(1) $w_\circ \in W$ であって $w_\circ\Pi = -\Pi$ となるものが唯一存在する。
(2) $\ell(w_\circ) = n(w_\circ) = |\Pi|$.
(3) $w_\circ^{-1} = w_\circ$.
(4) $\Delta \subset \Pi$ を単純ルート集合とする。$w_\circ$ は以下のような $w \in W$ として unique に特徴づけられる: 任意の $\alpha \in \Delta$ について $\ell(s_\alpha w) < \ell(w)$.
(5) $w_\circ = ww'$ と $w, w' \in W$ の積になっている時は $\ell(w_o) = \ell(w) + \ell(w')$.
(6) 任意の $w \in W$ について $\ell(w_\circ w) = \ell(w_\circ) - \ell(w)$.

定義. 上記の系の元 $w_\circ$ を W の (単純ルート集合 Δ に関する) **最長元**という。

1.9　生成元と関係式

定理. Φ の単純ルート集合 Δ を固定する。W は次の表示を持つ。

$$W \;=\; \langle s_\alpha \ (\alpha \in \Delta) \mid (s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha,\beta)} \;=\; 1 \ (\alpha, \beta \in \Delta) \rangle$$

但し $m(\alpha, \beta)$ は $s_\alpha s_\beta$ の W における位数。

証明. s_α 達が生成元であることは知っているので、任意の関係式

$$s_1 \cdots s_r = 1 \tag{1.1}$$

$(s_i = s_{\alpha_i})$ が定義関係式 $(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1$ の帰結であることを示せばよい。r は偶数であることに注意して、関係式の長さ r に関する帰納法で示す (偶数であることは $\det(s_i) = -1$ から従う)。

$r = 2$ なら $s_1 s_2 = 1$ から $s_1 = s_2^{-1} = s_2$ より $s_1^2 = 1$. これは定義関係式に含まれる。

$r = 2k-2$ まで示せたとする。関係式 (1.1) を

$$s_1 \cdots s_{k+1} \;=\; s_{2k} \cdots s_{k+2}$$

と変形する。右辺の長さは $k-1$ 以下で左辺より短いので、左辺は簡約表示にはなりえない。§1.7 定理 (b) を左辺に適用して、$1 \le i < j < k+1$ があって $s_{i+1} \cdots s_j = s_i \cdots s_{j-1}$. これは以下の等式と同値。

$$s_i \cdots s_{j-1} s_j \cdots s_{i+1} = 1 \tag{1.2}$$

もし (1.2) の長さが $2k$ 未満なら帰納法の仮定よりこれは定義関係式から導かれる。すると (1.1) は (1.2) を用いて $s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots \widehat{s_j} \cdots s_{2k} = 1$ と短くできて、再び帰納法の仮定より定義関係式の帰結だと分かる。

そこで (1.2) の長さが $2k$、つまり $i = 1, j = k+1$ だと仮定する。この時 (1.2) は

$$s_2 \cdots s_{k+1} = s_1 \cdots s_k. \tag{1.3}$$

与えられている関係式 (1.1) を $s_2 \cdots s_{2k} s_1 = 1$ と書き直し、それと (1.3) について前と同様の議論をする。定義関係式の帰結だと言えないのは

$$s_3 \cdots s_{k+2} = s_2 \cdots s_{k+1} \tag{1.4}$$

の時である。これを書き換えると $s_3(s_2 s_3 \cdots s_{k+1}) s_{k+2} s_{k+1} \cdots s_4 = 1$ と $2k$ 個の積になる。これについて再び前と同様の議論をする。定義関係式の帰結にできないのは

$$s_2 \cdots s_{k+1} = s_3 s_2 s_3 \cdots s_k$$

の場合。この場合は (1.3) から $s_1 = s_3$.

この議論を巡回的に添え字をずらした場合に適用すると、定義関係式に帰着できないのは ($s_1 = s_3$ かつ)$s_2 = s_4$ の場合。更に添え字をずらして議論を繰り返すと、定義関係式に帰着できないのは

$$s_1 = s_3 = \cdots = s_{2k-1} \text{ かつ } s_2 = s_4 = \cdots = s_{2k}$$

の時。しかしこの場合は元の関係式 (1.1) が $(s_1 s_2)^k = 1$ となっていて、定義関係式に含まれている。 □

定義. 群 W は表示 $W = \langle S \mid (ss')^{m(s,s')} = 1 \rangle$ を持つとき **Coxeter 群**と呼ばれる。但し任意の $s, s' \in S$ について、$m(s,s) = 1$ 及び $s \ne s'$ なら $m(s,s') \ge 2$

1.10 放物部分群

有限鏡映群 $W = W(\Phi)$ の部分群を考えたい。

定義. (1) Φ の単純ルート集合 Δ を固定する。$S := \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ を単純鏡映からなる W の部分**集合**とする。部分集合 $I \subset S$ に対し W_I を $s_\alpha \in I$ 達で生成される W の部分群とする。また $\Delta_I := \{\alpha \in \Delta \mid s_\alpha \in I\}$ と定める。
(2) wW_Iw^{-1} ($I \subset S$, $w \in W$) と書ける W の部分群を W の**放物部分群** (parabolic subgroup) と呼ぶ。

例. $W_\emptyset = \{1\}$, $W_S = W$.

命題. Φ の単純ルート集合 Δ を固定し対応する単純鏡映の集合を S と書く。$I \subset S$ に対し $V_I \subset V$ を Δ_I のはる ($\mathbb{R}$ 上の線形) 部分空間とし、$\Phi_I := \Phi \cap V_I$ と定める。また W の Δ に関する長さ関数を ℓ と書く。
(a) Φ_I は V 上のルート系であり、Δ_I は Φ_I の単純ルート集合である。対応する鏡映群は $W(\Phi_I) = W_I \le O(V)$ となる。また Φ_I は V_I 上のルート系でもあり、対応する鏡映群は $W(\Phi_I) = W_I|_{V_I} \le O(V_I)$ となる。
(b) $W_I = W(\Phi_I)$ の単純ルート集合 Δ_I に関する長さ関数を ℓ_I とすると、W_I 上では $\ell_I = \ell$.
(c) $W^I := \{w \in W \mid \ell(ws) > \ell(w)\ \forall s \in I\}$ とする。任意の $w \in W$ に対し $w = uv$ となる $u \in W^I$, $v \in W_I$ が唯一存在する。この時更に長さに関して $\ell(w) = \ell(u) + \ell(v)$ となっていて、また u は wW_I の中で最も短い唯一の元でもある。

証明. (a) 易しいので省略。
(b) Π を Δ を含む Φ の正ルート集合とすると §1.7 の定理より $w \in \Pi$ について $\ell(w) = |\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)|$. また $\Pi_I := \Pi \cap \Phi_I$ とすれば $w \in W_I$ について $\ell_I(w) = |\Pi_I \cap w^{-1}(-\Pi_I)|$. $\alpha \in \Pi \setminus \Phi_I$ を単純ルートの線形結合で書け

ばある $\gamma \in \Delta \setminus \Delta_I$ が含まれる。よって任意の $\beta \in \Delta_I$ について $s_\beta\alpha$ は γ を正の係数付きで含む。これは $s_\beta\alpha > 0$ を意味する。よって任意の $w \in W_I$ について $w\alpha > 0$. 従って $w \in W_I$ について $\Pi_I \cap w^{-1}(-\Pi_I) = \Pi \cap w^{-1}(-\Pi)$. 再び §1.7 より $\ell_I(w) = \ell(w)$.
(c) $w \in W$ に対し $u \in wW_I$ であって最短長のものを一つ取る。するとある $v \in W_I$ で $w = uv$ と書ける。任意の $s \in I$ について $us \in wW_I$ だから $u \in W^I$. この u, v の簡約表示を $u = s_1 \cdots s_p$, $v = s'_1 \cdots s'_q$ とする。(b) より $s'_i in I$ として良い。この時 $\ell(w) \leq \ell(u) + \ell(v)$. もし $\ell(w) < \ell(u) + \ell(v)$ なら、§1.7 より $uv = s_1 \cdots s_p s'_1 \cdots s'_q$ から 2 つ単純鏡映を取り除くことができる。しかし u の取り方から $s_1, \dots, s_p$ からは 1 つも取り除けない。よって $s'_1 \dots, s'_q$ から取り除くことになるが、これは v の簡約表示を取ったことに反する。以上より $\ell(w) = \ell(u) + \ell(v)$ である。

もし u とは別の最短長の元 $u' \in wW_I$ があったとしたら $u' = ux$, $\ell(x) =: r > 0$ と書ける。$x = s_1 \cdots s_r$ ($s_i \in I$) と簡約表示すると $\ell(u's_r) < \ell(u')$ となり $u' \in W^I$ に反する。 □

1.11　Poincaré 多項式

定義. 有限鏡映群 W の部分集合 X に対し $X(t) := \sum_{w \in X} t^{\ell(w)}$ を X の **Poincaré 多項式**と呼ぶ。特に

$$W(t) = \sum_{w \in W} t^{\ell(w)} = \sum_{n \geq 0} |\{w \in W \mid \ell(w) = n\}| \, t^{\ell(w)}.$$

例. $W = \mathfrak{S}_3$ なら $W(t) = 1 + 2t + 2t^2 + t^3$.

命題. Φ の単純ルート集合 Δ を固定し $S := \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\} \subset W$ とする。
(a) 任意の部分集合 $I \subset S$ について $W(t) = W_I(t) W^I(t)$.
(b) Δ を含む正ルート集合を Π とすると

$$\sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} \frac{W(t)}{W_I(t)} = \sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} W^I(t) = t^{|\Pi|}.$$

証明. (a) §1.10 の命題 (c) から従う。
(b) 最初の等号は (a) から従う。各 $w \in W$ の中辺への寄与を考える。$K_w := \{s \in S \mid \ell(ws) > \ell(w)\}$ とすれば $w \in W^I \iff I \subset K_w$. よって中辺における $t^{\ell(w)}$ の係数は $\sum_{I \subset K_w} (-1)^{|I|}$. $K_w \neq \emptyset$ なら $\sum_{I \subset K_w} (-1)^{|I|} = (1-1)^{|K_w|} = 0$. $K_w = \emptyset$ は $w = w_\circ$ と同値で §1.8 より $t^{\ell(w_\circ)} = t^{|\Pi|}$. 以上より 2 番目の等号を得る。 □

系. 上の命題と同じ記号のもとで

$$\sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} \frac{|W|}{|W_I|} = 1.$$

証明. 命題 (b) で $t = 1$ とし $X(t) = |X|$ に注意すればよい。 □

参考文献

James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge の §§1.8–1.11.

以上です。