2017 年度前期 代数学 I/代数学概論 V　4 月 20 日分レポート問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

レポート問題 1 (5 点)**.** Φ を階数 n のルート系であって全ての元の長さが 1 のものとする。部分集合 $\Psi \subset \Phi$ は $|\Psi| = n$ であって、Ψ の元達が互いになす角度の集合が Φ のある単純ルート集合の元達のなす角度の集合と一致するものとする。この時 Ψ もまた単純ルート集合になることを示せ。

レポート問題 2 (5 点)**.** ルート系 Φ の単純ルート集合 Δ の真部分集合 $I \subsetneq \Delta$ を任意に取る。I に属する単純鏡映達は有限鏡映群 $W = W(\Phi)$ を生成しない、即ち $\langle s_\alpha \, (\alpha \in I) \rangle \subsetneq W$ を示せ。

レポート問題 3 (5 点)**.** $\Delta \subset \Pi$ をルート系 Φ の単純ルート集合およびそれを含む正ルート集合とする。$\beta \in \Pi \setminus \Delta$ なら $\mathrm{ht}(\beta) > 1$ を示せ。

レポート問題 4 (5 点)**.** V を Euclid 空間、$W \subset O(V)$ を有限鏡映群とする。
(1) $w \in W$ について $(-1)^{n(w)} = \det(w)$ となることを示せ。但し右辺の det は $W \subset O(V)$ とみなした時の行列式である。
(2) $w, w' \in W$ なら $n(ww') \leq n(w) + n(w')$ かつ $n(ww') \equiv n(w) + n(w') \pmod 2$ となることを示せ。

レポート問題 5 (5 点)**.** 対称群 $\mathfrak{S}_n$ は隣接互換 $(i, i+1)$ 達を単純鏡映とする単純ルート集合 Δ を持つ。この Δ に関する $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ の長さ $\ell(\sigma)$ は転倒数、即ち $\sigma(i) > \sigma(j)$ となる 1 以上 n 以下の整数の対 $i < j$ の数と一致することを示せ。

出典について

Humphreys, “Reflection Groups and Coxeter Groups” より引用しました。問題 1–3 はの §1.6 の Exercise 1–3, 問題 5 は §1.7 の Exercise 1 です。

この講義の webpage

このクラス用のウェブページを以下のアドレスに作りました。配布物や予定を載せていきます。
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2017S-AlgI.html

オフィスアワー

4/21 と 4/28 の Cafe David でのオフィスアワーはお休みさせて頂きます。他の時間に相談に来てください。

以上です。

[*1] 2017/04/20 版, ver. 1.0