2017 年度前期 代数学 I/代数学概論 V　4 月 20 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 棟 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

1　有限鏡映群

1.3　正ルート、単純ルート

実 Euclid 空間 V とそのルート系 Φ について前節で有限鏡映群 $W = W(\Phi)$ が定まることが分かった。特に Φ は群 W の生成系を与えている。群表示の問題ではなるべく生成元の数を減らすのが自然であるが、我々の文脈ではこれは Φ の「良い」部分集合を定めることと同義である。こうして現れるのが正ルート及び単純ルートの概念である。

定義. (1) **実線形空間 V 上の全順序** $\geq$ とは集合 V 上の全順序 $\geq$ であって次の条件を満たすもののことである。
i) 任意の $u, v, w \in V$ に対し $u \geq v$ なら $u + w \geq v + w$.
ii) $v \geq w$ なる $v, w \in V$ と任意の $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ について $c > 0$ なら $cv \geq cw$, また $c < 0$ なら $cv \leq cw$.
(2) V 上の全順序 $\geq$ が与えられたとする。$v \in V$ は $v > 0$ の時 (全順序 $\geq$ に関して) **正** (positive) と呼ばれる。

注意. V の元のうち正のものの集合は錘 (cone) である。即ち加法及び正のスカラー倍で閉じている。

例. このような全順序は辞書次式順序を用いて作ることができる。$u_1, \ldots, u_n$ を V の基底とする。$v, w \in V$ を $v = \sum_{i=1}^n a_i u_i$, $w = \sum_{i=1}^n b_i u_i$ と表した時に $a_i \neq b_i$ となる最小の添え字 i を k として、$v > w \stackrel{\text{dfn}}{\iff} a_k > b_k$ と定義すればよい。

定義. 実 Euclid 空間 V 上のルート系 Φ を考える。Φ の部分集合 Π は、ある V 上の全順序 $\geq$ があって $\Pi = \{v \in \Phi \mid v > 0\}$ となるとき**正ルート集合** (positive root system) と呼ばれる。Π の元を**正ルート** (positive root) と呼ぶ。

注意. 正ルート集合 $\Pi \subset \Phi$ が与えられると $\Phi = \Pi \sqcup (-\Pi)$ となることがルート系の公理 (R1) ($\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\pm\alpha\}$) から従う。また全順序の存在から正ルート集合も必ず存在する。

定義. 部分集合 $\Delta \subset \Phi$ は以下の条件を満たすとき**単純ルート集合** (simple root system) と呼ばれる。また Δ の元を**単純ルート** (simple root) と呼ぶ。
i) Δ は Φ の張る V の部分空間の基底。
ii) 各 $\alpha \in \Phi$ を Δ の線形結合で表したときに係数の符号が全て一致する。

正ルート集合の存在性に比べて単純ルート集合の存在性は非自明である。

定理. (a) $\Delta \subset \Phi$ が単純ルート集合の時、Δ を含む正ルート集合が唯一存在する。
(b) 任意の正ルート集合 $\Pi \subset \Phi$ は単純ルート集合を唯一つ含む。特に単純ルート集合は必ず存在する。

証明. (a) 省略する。
(b) 前半の主張のうち唯一性は簡単なので省略する。また後半は正ルート集合の存在と前半から従う。

Π の部分集合 Δ であって Π の各元が Δ の非負係数の線形結合で書けるようなもののうち最小のものを改めて Δ とする (このような Δ は必ず存在する)。あとは Δ が線形独立であることを示せば、Δ が Π に含まれる単純ルート集合だと分かる。そのためには

$$\alpha \neq \beta \text{ となる任意の } \alpha, \beta \text{ について } (\alpha, \beta) \leq 0 \tag{$\sharp$}$$

[*1] 2017/04/20 版, ver. 0.4.

を示せば十分である。実際 $(\sharp)$ が成立すると仮定して、$\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha\alpha = 0$ とすると、係数 c_α が正のものと負のものに分けてこの等式を $\sum b_\beta\beta = \sum d_\gamma\gamma$, $b_\beta > 0$, $d_\gamma > 0$ と書き直せる。等号の両辺を v と書くと、内積の非退化性と $(\sharp)$ から $0 \le (v,v) = (\sum b_\beta\beta, \sum d_\gamma\gamma) \le 0$. これより $v = 0$ で c_α は全て 0.

以上より $(\sharp)$ を示せばよい。ある対 $\alpha, \beta \in \Delta$ について成立しないと仮定する。$s_\alpha\beta = \beta - c\alpha$ と書くと $c = 2(\beta,\alpha)/(\alpha,\alpha) > 0$. また $\Phi = \Pi \sqcup (-\Pi)$ より $\pm s_\alpha\beta \in \Pi$.

I) まず $s_\alpha\beta \in \Pi$ と仮定する。$s_\alpha\beta = \sum c_\gamma\gamma$ と書くと $c_\gamma \ge 0$. ここでさらに場合分けして

- i) $c_\beta < 1$ の時。$\beta - c\alpha = \sum c_\gamma\gamma$ より $(1-c_\beta)\beta = c\alpha + \sum_{\gamma\ne\beta} c_\gamma\gamma$. これより β が $\Delta \setminus \{\beta\}$ の正の線形結合で表せてしまい、Δ の最小性と矛盾する。
- ii) $c_\beta \ge 1$ の時は $0 = (c_\beta - 1)\beta + c\alpha + \sum_{\gamma\ne\beta} c_\gamma\gamma$ だが、右辺は非負係数の線形結合だから全順序 $\ge$ の性質より全ての係数は 0. しかし α の係数は $c + c_\alpha > 0$ なので矛盾。

II) $-s_\alpha\beta \in \Pi$ と仮定する。$s_\alpha\beta = -\sum c_\gamma\gamma$ と書くと $c_\gamma \ge 0$.

- i) $c > c_\alpha$ の時は $\beta - c\alpha = -\sum c_\gamma\gamma$ より $(c - c_\alpha)\alpha = \beta + \sum_{\gamma\ne\alpha} c_\gamma\gamma$ で I) の i) と同様に Δ の最小性と矛盾。
- ii) $c \le c_\alpha$ の時は $0 = (c_\alpha - c)\alpha + \beta + \sum_{\gamma\ne\alpha} c_\gamma\gamma$ から I) の ii) と同様に矛盾。

以上より $(\sharp)$ の証明が終わった。 □

証明中の議論から

系. Δ がルート系 Φ の単純ルート集合ならば、任意の $\alpha \ne \beta \in \Delta$ について $(\alpha,\beta) \le 0$.

定義. ルート系 Φ(又は付随する有限鏡映群 $W = W(\Phi)$) の**階数** $\operatorname{rank}\Phi$(又は $\operatorname{rank} W$) とは Φ の単純ルート集合の濃度のことである。

注意. 単純ルート集合は Φ の張る V の部分空間 $\mathbb{R}\Phi$ の基底なので、$\operatorname{rank}\Phi = \dim\mathbb{R}\Phi$ となり、特に単純ルート集合の取り方に依存しない。

例. §1.1 の例について、$\operatorname{rank}\mathfrak{D}_m = 2$, $\operatorname{rank}\mathfrak{S}_n = n-1$.

1.4 正ルート集合および単純ルート集合の共役性

命題. Π を Φ の正ルート集合、Δ を Π に含まれる Φ の単純ルート集合とする。各 $\alpha \in \Delta$ について $s_\alpha(\Pi \setminus \{\alpha\}) = \Pi \setminus \{\alpha\}$.

証明. $\beta \in \Pi \setminus \{\alpha\}$ を $\beta = \sum_{\gamma\in\Delta} c_\gamma\gamma$ とかくと、$\mathbb{R}\alpha \cap \Phi = \{\pm\alpha\}$ より、ある $\gamma_0 \in \Delta \setminus \{\alpha\}$ について $c_{\gamma_0} > 0$. すると $s_\alpha\beta = \beta - c\alpha$ の γ_0 の係数も正で、$\Phi = \Pi \sqcup (-\Pi)$ から $s_\alpha\beta = \sum_{\gamma\in\Delta} c'_\gamma\gamma$ と書いたときの全ての係数 c'_γ は正。従って $s_\alpha\beta \ne -\alpha$. 以上より任意の $\beta \in \Pi \setminus \{\alpha\}$ は s_α で $\Pi \setminus \{\alpha\}$ の元に写る。あとは $s_\alpha^2 = \mathrm{id}$ より $\Pi \setminus \{\alpha\}$ 上で s_α は全単射である。 □

定理. Φ の任意の 2 つの正ルート集合は W で共役である。また任意の 2 つの単純ルート集合も W で共役である。

証明. Π と Π' を正ルート集合とする。$\Phi = \Pi \sqcup (-\Pi) = \Pi' \sqcup (-\Pi')$ に注意して、$r := |\Pi \cap (-\Pi')|$ に関する帰納法で示す。$r = 0$ なら $\Pi = \Pi'$ なので良い。$r > 0$ なら Π に含まれる単純ルート集合 Δ は Π' には含まれないから $\alpha \in \Delta \cap (-\Pi')$ なる元 α がある。上の命題より $|(s_\alpha\Pi) \cap (-\Pi')| = r - 1$. 帰納法の仮定を $s_\alpha\Pi$ と Π' に適用して、ある $w \in W$ があって $w(s_\alpha\Pi) = \Pi'$. よって $(ws_\alpha)\Pi = \Pi'$ なので示せた。

単純ルート集合については §1.3 の正ルート集合と単純ルート集合の対応と前半の主張から従う。 □

1.5 単純鏡映による生成

Δ を Φ の単純ルート集合とし、Π を対応する正ルート集合とする。$\alpha \in \Delta$ に対応した $s_\alpha \in W = W(\Phi)$ を (Δ に属する) **単純鏡映**と呼ぶ。

定義. 各 $\beta \in \Phi$ を $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha \alpha$ と書いたときの

$$\mathrm{ht}(\beta) := \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha$$

を β の (Δ に関する) **高さ** (height) と呼ぶ。

例えば $\alpha \in \Delta$ なら $\mathrm{ht}(\alpha) = 1$ である。

定理. 任意の正ルート集合 Δ について W は Δ に属する単純鏡映で生成される。即ち $W = \langle s_\alpha\,(\alpha \in \Delta)\rangle$.

証明. $W' := \langle s_\alpha\,(\alpha \in \Delta)\rangle$ を単純鏡映で生成される W の部分群とする。

$\beta \in \Pi$ を任意にとり $W'\beta \cap \Pi$ の元の中で最小の高さをもつものを γ とする。この時 $\gamma \in \Delta$ となる。実際 $\gamma = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha\alpha$ とすると $0 < (\gamma,\gamma) = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha(\gamma,\alpha)$ よりある $\alpha \in \Delta$ について $(\gamma,\alpha) > 0$. $\gamma = \alpha$ なら $\gamma \in \Delta$. $\gamma \neq \alpha$ なら §1.4 の命題より $s_\alpha\gamma \in \Pi$. 一方 $s_\alpha\gamma = \gamma - c\alpha$, $c = 2(\gamma,\alpha)/(\alpha,\alpha) > 0$ だから $\mathrm{ht}(s_\alpha\gamma) < \mathrm{ht}(\gamma)$. これは $s_\alpha\gamma \in W'\beta$ より γ の取り方と矛盾する。よって $\gamma \in \Delta$.

次に $W'\Delta = \Phi$ を示す。上の議論から任意の $\beta \in \Pi$ の W' 軌道は Δ と交わるので $\Pi \subset W'\Delta$. また $\beta \in -\Pi$ ならある $\alpha \in \Delta$ と $w \in W'$ が存在して $-\beta = w\alpha$. これから $\beta = (ws_\alpha)\alpha$. よって $-\Pi \subset W'\Delta$. $\Pi \sqcup (-\Pi) = \Phi$ より $W'\Delta = \Phi$ を得る。

最後に任意の生成元 $s_\beta \in W$ $(\beta \in \Phi)$ を取る。上の議論からある $\alpha \in \Delta$ と $w \in W'$ があって $\beta = w\alpha$. すると §1.2 の命題から $s_\beta = ws_\alpha w^{-1} \in W'$. 以上より $W' = W$. □

上の証明中で示した $W'\Delta = \Phi$ を系として述べておく。

系. 任意の $\beta \in \Phi$ に対しある $w \in W$ があって $w\beta \in \Delta$.

1.6　長さ関数

前節の結果から有限鏡映群 W は単純鏡映で生成されることが分かった。実はこの生成系に関する W の関係式が明示的に求まる (§1.9)。今後暫くはその準備をしていく。

以下ルート系 Φ の単純ルート集合 Δ を一つとって固定しておく。$W = W(\Phi)$ を付随する有限鏡映群とする。

定義. $w \in W$ の (Δ に関する) **長さ** (length) $\ell(w)$ とは $w = s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_r}$, $\alpha_i \in \Delta$ と単純鏡映の積で書いたときの r の最小値のこと。またこの最小値を与えるような表示 $w = s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_{\ell(w)}}$ のことを w の**簡約表示** (reduced expression) という。

注意. (a) $\ell(w) = 1 \iff w = s_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$.
(b) $\ell(w) = \ell(w^{-1})$. 実際 $w = s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_r}$ なら $w^{-1} = s_{\alpha_r}\cdots s_{\alpha_1}$ なので $\ell(w^{-1}) \leq \ell(w)$.

$\ell(w)$ を正ルート集合に関する量で表すことができる。次に定義する $n(w)$ がそれである。

定義. Δ を含む正ルート集合を Π とすして、$w \in W$ に対し

$$n(w) := \left|\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)\right|.$$

次節で実は $n(w) = \ell(w)$ であることを示す。そのためにいくつか準備をする。

補題. $\alpha \in \Delta$, $w \in W$ について
(a) $w\alpha > 0$ なら $n(ws_\alpha) = n(w) + 1$.
(b) $w\alpha < 0$ なら $n(ws_\alpha) = n(w) - 1$.
(c) $w^{-1}\alpha > 0$ なら $n(ws_\alpha) = n(w) + 1$.
(d) $w^{-1}\alpha < 0$ なら $n(ws_\alpha) = n(w) - 1$.

証明. $\Pi(w) := \Pi \cap w^{-1}(-\Pi)$ とおく。特に $n(w) = |\Pi(w)|$. §1.4 命題よりもし $w\alpha > 0$ なら $\Pi(ws_\alpha) =$

$s_\alpha\Pi(w)\sqcup\{\alpha\}$. これから (a) が従う。また $w\alpha<0$ なら $s_\alpha\Pi(ws_\alpha)=\Pi(w)\setminus\{\alpha\}$ かつ $\alpha\notin\Pi(w)$. よって (b) が成立する。(c) と (d) は (a) と (b) で w を w^{-1} に置き換えて $n(w^{-1}a_\alpha)=n(s_\alpha w)$ を使うと分かる。 □

系. $w=s_{\alpha_1}\cdots s_{\alpha_r}$ と r 個の単純鏡映の積でかけるならば $n(w)\le r$. 特に $n(w)\le\ell(w)$.

証明. 上の補題より単純鏡映をかけていく度に関数 n の値は高々 1 しか増えない。 □

1.7 簡約表示

定理. 単純ルート集合 Δ を固定する。$w\in W$ が $w=s_1\cdots s_r$ と単純鏡映 $s_i=s_{\alpha_i}$ 達の積で表されているとする。もし $n(w)<r$ なら $1\le i<j\le r$ であって以下の条件を満たすものが存在する。
(a) $\alpha_i=(s_{i+1}\cdots s_{j-1})\alpha_j$,
(b) $s_{i+1}s_{i+2}\cdots s_j=s_is_{i+1}\cdots s_{j-1}$,
(c) $w=s_1\cdots\widehat{s}_i\cdots\widehat{s}_j\cdots s_r$. 但し $\widehat{s}_i$ は i 番目の項を除くことを意味する。

証明. (a) $n(w)<r$ と §1.6 補題 (a) の繰り返しにより、ある $j\le r$ があって $s_1\cdots s_{j-1}\alpha_j<0$. しかし $\alpha_j>0$ だからある $i<j$ があって $(s_{i+1}\cdots s_{j-1})\alpha_j>0$ かつ $s_i(s_{i+1}\cdots s_{j-1})\alpha_j<0$. §1.4 命題を s_i に適用して、s_i の作用で負になる正ルート $(s_{i+1}\cdots s_{j-1})\alpha_j$ は α_i だと分かる。
(b) $\alpha:=\alpha_j$, $w':=s_{i+1}\cdots s_{j-1}$ とする。(a) より $w'\alpha=\alpha_i$. §1.2 命題より $w's_\alpha w'^{-1}=s_{w'\alpha}=s_i$. つまり $(s_{i+1}\cdots s_{j-1})s_j(s_{j-1}\cdots s_{i+1})=s_i$. これから結論を得る。
(c) は (b) から直ちに従う。 □

系. 任意の $w\in W$ について $n(w)=\ell(w)$.

証明. §1.6 系より $n(w)\le\ell(w)$. もし $n(w)<\ell(w)=r$ なら $w=s_1\cdots s_r$ と書いたときに上の定理 (c) から w は $r-2$ 個の単純鏡映の積で書けるので $\ell(w)=r$ に反する。 □

参考文献

James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge の §§1.3–1.7.

以上です。