担当教員：柳田　伸太郎、松尾　信一郎、泉　圭介　研究室：多元 453、多元 502

ちからだめし

実施日：October 6, 2016

注意事項

- 問題は全部で３問ある
- 所定の解答欄に記入すること
- 解答用紙それぞれに名前と学籍番号の記入を忘れないこと。記入欄は３か所ある。

問題 1.

(1) $X = \{a, b, c, d, e\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とし $f : X \to Y$ を次で定める:

$$f(a) = f(b) = 2, f(c) = 3, f(d) = f(e) = 5.$$

このとき以下の集合を求めよ.

(a) $f(\{a, b, c\}) \cup f(\{a, c, e\})$

(b) $f(\{a, b\}) \cap f(\{e\})$

(c) $f^{-1}(\{1, 3, 5\}) \cup f^{-1}(\{2\})$

(d) $f^{-1}(\{1\}) \cap f^{-1}(\{2, 3, 5\})$

(2) 集合 X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ が全射であること, 単射であること, 全単射であることの定義をそれぞれ述べよ.

(3) 以下で定義される X から Y への写像 $f : X \to Y$ は全射であるか, 単射であるか, 全単射であるか, またはそのどれでもないか, 理由を添えて答えよ. (c) については X から Y への写像としてきちんと定義されていることも示せ. また全単射である場合は逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ を求めよ.

(a) $X = (-1, 1)$, $Y = [0, 1]$, $f(x) = x^2$ $(x \in X)$.

(b) $X = (0, +\infty) \times [0, 2\pi]$, $Y = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(r, \theta) = re^{i\theta}$ $((r, \theta) \in X)$.

(c) $X = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $Y = \{w \in \mathbb{C}; |w| < 1\}$, $f(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$ $(z \in X)$.

問題 2.

(1) 二つの実無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が次を満たしているとする.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ は絶対収束し,} \quad |a_n| \leq b_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \text{ が成り立つ.}$$

このとき $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束することを示せ.

(2) 単位閉区間 $[0,1]$ 上の関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を次で定義する:

$$f_n(x) = \frac{1}{n}x^n, \quad 0 \le x \le 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

(a) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に $[0,1]$ 上で一様収束することを示せ. ただし, $[0,1]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 f に $[0,1]$ 上で一様収束するとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $n \ge N$ ならば $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が任意の $x \in [0,1]$ に対して成り立つような, 番号 N が取れるときを言う.

(b) 関数 f_n を一回微分して得られる関数列 $\{f'_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は $[0,1]$ 上である関数に一様収束するか?する場合は収束先の関数を求め一様収束することの証明を与え, 一様収束しない場合は一様収束しないことを証明せよ.

問題 3.

V を 2 次以下の実係数 1 変数多項式全体のなすベクトル空間とする:

$$V = \{p = p(x)\,;\, p(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 任意の $p(x) = ax^2 + bx + c \in V$ に対して線形写像 $p(D) : V \to V$ を

$$p(D)q = a\frac{d^2}{dx^2}q + b\frac{d}{dx}q + cq$$

で定義する. このとき $p(D)$ の基底 $\{x^2, x, 1\}$ に関する表現行列を求めよ.

(2) 二つの多項式 $p, q \in V$ に対して $\langle p, q\rangle := (p(D)q)(0)$ と定義する. ただし右辺は多項式 $p(D)q$ の $x = 0$ での値である. このとき $\langle p, q\rangle$ は実ベクトル空間 V 上の内積となることを示せ.

(3) V 上の線形関数 $\ell : V \to \mathbb{R}$ を次で定義する:

$$\ell(p) := \int_0^1 p(x)\,dx, \quad p \in V.$$

このとき $\ell(p) = \langle p, I\rangle$ が任意の $p \in V$ に対して成り立つようなベクトル (多項式) $I \in V$ を具体的に求めよ.

(4) 上の問題の線形関数 ℓ を ℓ_1 と書き, さらに二つの線形関数 $\ell_2, \ell_3 : V \to \mathbb{R}$ を

$$\ell_2(p) := \int_0^1 p'(x)\,dx, \quad \ell_3(p) := \int_0^1 p''(x)\,dx, \quad p \in V$$

と定義する. このとき V 上の三つの線形関数 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 は (V 上の $\mathbb{R}$ に値を取る線形関数全体のなす実ベクトル空間内で) 一次独立であることを証明せよ.

担当教員：柳田　伸太郎、松尾　信一郎、泉　圭介　研究室：多元 453、多元 502

ちからだめし

実施日：October 6, 2016

学生番号 ____________ 名前 ____________

問題 1.

ちからだめし

学生番号 ____________________ 名前 ____________________

問題 2.

担当教員：柳田　伸太郎、松尾　信一郎、泉　圭介　研究室：多元 453、多元 502

ちからだめし

実施日：October 6, 2016

学生番号 ____________________ 名前 ____________________

問題 3.