担当教員：柳田伸太郎、松尾信一郎、泉圭介　研究室：A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

ちからだめし 解答

作成日：October 11, 2016　　実施日：October 06, 2016

問題 1. （採点担当：柳田）

(1) (a) $\{2,3,5\}$　(b) $\emptyset$　(c) $\{a,b,c,d,e\}=X$　(d) $\emptyset$

(2) 集合 X から集合 Y への写像 $f:X\to Y$ が全射であるとは, 任意の $y\in Y$ に対してある $x\in X$ が存在して $f(x)=y$ となることをいう.

$f:X\to Y$ が単射であるとは, $x_1,x_2\in X$ が $f(x_1)=f(x_2)$ を満たせば $x_1=x_2$ が成り立つことをいう.

$f:X\to Y$ が全単射であるとは, f が全射かつ単射であることをいう.

(3) (a) 全射でも単射でもない.
実際 $y=1\in Y$ について $f(x)=y \iff x^2=1 \iff x=\pm1$ だが $\pm1\notin X$ なので全射ではない.
また $\pm1/2\in X$ について $f(\pm1/2)=1/4$ なので単射でもない.

(b) 全射であるが単射ではない.
実際 $r>0$ なら $f(r,0)=f(r,2\pi)=r\in Y$ となるので f は単射でない.
また任意の $z\in Y$ に対して $r:=|z|$ とおく. $r>0$ に注意して, $|z/r|=1$ よりある $\theta\in[0,2\pi)$ が存在して $z/r=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$ と書ける. つまり $f(r,\theta)=z$ となる $(r,\theta)\in X$ が存在するので f は全射である.

(c) 全単射である. まず f が X から Y への写像であることを示す. $z\in X$ について

$$|f(z)|^2=\frac{|z|^2-2\mathrm{Im}(z)+1}{|z|^2+2\mathrm{Im}(z)+1}$$

となるが, $\mathrm{Im}(z)>0$ より $|f(z)|<1$. よって f は X から Y への写像である.
次に $w\in Y$ に対し

$$g(w):=i\frac{1+w}{1-w}$$

とおく. $1\notin Y$ であり, また任意の $w\in Y$ に対して

$$\mathrm{Im}(g(w))=\frac{1-|w|^2}{|1-w|^2}>0$$

となるから写像 $g:Y\to X$ が定義される. 簡単な計算で $g\circ f=\mathrm{id}_X$, $f\circ g=\mathrm{id}_Y$ が分かる. 従って $f:X\to Y$ は全単射. $g=f^{-1}:Y\to X$ が逆写像を与える.

採点基準：5 点満点. (1) 0.25 点 $\times$ 4　(2) 0.4 点 $\times$ 2 (全射及び単射) + 0.2 点（全単射）　(3) (a) 0.5 点 $\times$ 2 (全射でない理由, 単射でない理由)　(b) 0.5 点 $\times$ 2 (全射である理由, 単射でない理由)　(c) 0.2+0.4+0.4 点 (写像であること, 全単射である理由, 逆写像)

コメント：(3)(b) の全射性を示すとき $\theta:=\arg z$, $\arccos(\mathrm{Re}(z)/|z|)$ 等と定めてもよいのですが, 厳密にはこれらの関数は定義域や値域を明記する必要があります.

また (3)(c) で「X から Y への写像としてきちんと定義されていること」を示せとありますが, f は関数なので写像であることは自明です. また X が定義域であることも明らかでしょう. 大事なのは値域が Y になること, つまり $f(X)\subset Y$ であることを示す点です.

担当教員： 柳田伸太郎、松尾信一郎、泉圭介 研究室： A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 2. （採点担当：松尾）

(1) 任意の自然数 n に対して $A_n = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$, $B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$ とおく．仮定から数列 $\{B_n\}$ は $B = \sum_{i=1}^{\infty} b_i$ に収束している．よって数列 $\{B_n\}$ はコーシー列である．従って, 仮定から $n > m$ として

$$|A_n - A_m| = \sum_{i=m+1}^{n} |a_i| \leq \sum_{i=m+1}^{n} b_i = B_n - B_m \to 0$$

が $n, m \to \infty$ のとき成り立つから数列 $\{A_n\}$ はコーシー列, よって収束列である．従って級数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ は絶対収束する．

(2) (a) 任意の $\varepsilon > 0$ を与える．このとき番号 (自然数) N で $1/N < \varepsilon$ となるものを取る．すると $n \geq N$ となる任意の自然数 n と任意の $x \in [0,1]$ に対して $|x^n| \leq 1$ より

$$|f_n(x)| \leq 1/n \leq 1/N < \varepsilon$$

となるから, $\{f_n\}$ は 0 に $[0,1]$ 上一様収束することが示された．

(b) $f_n'(x) = x^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ である．これは $[0,1]$ 上の連続関数であり, 次の関数 $g(x)$ に各点収束する:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

そこで $\{f_n'\}$ が一様収束していると仮定すると, 一様収束先は上記の関数 g でなくてはならない．ところが $x_n := (1/2)^{1/(n-1)}$ とおくと,

$$|f_n'(x_n) - g(x_n)| = 1/2$$

となるから, $\{f_n'\}$ が g に一様収束するという仮定に矛盾する．よって $\{f_n'\}$ は一様収束しない．

採点基準：3 点満点． (1) 1 点 (2) (a) 1 点 (b) 1 点

コメント：(1) コーシー列をあやふやに使ってる解答が散見されました．(2) 妙なところが厳密で肝心なところが曖昧な解答が多発しました．(2)(b) 連続函数の列の一様収束極限は連続であるという事実を使っていると明示的に書かない限り，g が連続でないから一様収束ではないという解答はバツにしました．解答者が本当にわかってるのかわかってないのかわからないからです．

担当教員：柳田伸太郎、松尾信一郎、泉圭介　研究室：A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3. （採点担当：泉）

(1) $p \in V$ を $p(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}$ と表示して a, b, c で線形写像 $p(D) : V \to V$ の表現行列を具体的に記述すれば良い．具体的に計算することによって, $p(D)x^2 = cx^2 + 2bx + 2a,\ p(D)x = cx + b,\ p(D)1 = c$ が分かる．つまり,

$$[p(D)x^2, p(D)x, p(D)1] = [cx^2 + 2bx + 2a, cx + b, c] = [x^2, x, 1]\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 2b & c & 0 \\ 2a & b & c \end{pmatrix}$$

となり, 上式右辺の行列が線形写像 $p(D) : V \to V$ の表現行列を与える．

(2) $p, q \in V$ を $p(x) = ax^2 + bx + c,\ q(x) = kx^2 + lx + m,\ a, b, c, k, l, m \in \mathbb{R}$ とおく．このとき

$$p(D)q = kp(D)x^2 + lp(D)x + mp(D)1 = 2ak + bl + cm + \ (x \text{ を含む項})$$

となるから,

$$\langle p, q \rangle = [p(D)q](0) = 2ak + bl + cm \tag{1}$$

となる．これは p と q について対称な式であるから $\langle p, q \rangle = \langle q, p \rangle$. また, 式 (1) で $p = q$ とすると $\langle p, p \rangle = 2a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$ であり $\langle p, p \rangle = 0$ となるのは $p = 0$ のときに限ることが分かる．さらに, $p(D) : V \to V$ が線形写像だから $r \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$ とすると

$$\langle p, \lambda q \rangle = [p(D)(\lambda q)](0) = \lambda[p(D)q](0) = \lambda\langle p, q \rangle,$$
$$\langle p, q + r \rangle = [p(D)(q + r)](0) = [p(D)q](0) + [p(D)r](0) = \langle p, q \rangle + \langle p, r \rangle$$

となるから $\langle p, q \rangle$ は q について線形である．従って $\langle p, q \rangle$ は V 上の内積である．

(3) $p = ax^2 + bx + c \in V$ に対して

$$\ell(p) = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c$$

となる．従って,

$$I = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \in V$$

とおくと式 (1) より任意の $p \in V$ に対して $\ell(p) = \langle p, I \rangle$ が成り立つ．

(4) 実数 $a, b, c \in \mathbb{R}$ が $a\ell_3 + b\ell_2 + c\ell_1 = 0$ を満たしているとする．このとき $a = b = c = 0$ を示せば良い．任意の $q \in V$ に対して

$$a\ell_3(q) + b\ell_2(q) + c\ell_1(q) = 0$$

だから $q = 1$ とすると $\ell_2(1) = \ell_3(1) = 0$ より $c = 0$ が分かる．同様にして $q = x$, $q = x^2$ とすると, 順に $b = 0,\ a = 0$ が分かる．

採点基準：4 点満点． (1),(2),(3),(4) 各 1 点

コメント：(1) 表現行列の定義を理解していない人が何人かいました．(2) 内積の定義を書くだけで, 具体的な計算を書いていない人が少なからずいました. きちんと計算しましょう．(3) 内積 $\langle p, I \rangle$ の計算ミスが多かったです．(4) 解答している人は, 大方きちんと解けていました．