担当教員: 柳田 伸太郎 研究室: A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

解答 (複素関数の補足問題集)

作成日: 12/01/2016 更新日: 01/26/2017 Version: 1.1

問題 1. (1) $300i(5+6it)^{49}$. (2) $(2t+i)\exp(t^2+it)$. (3) $i\cot(it)\sin(\log(\sin(it)))$.

問題 2. (1) $(1+ix)^3-1$. (2) $\log(1+e^{ix})-\log(2)$. (3) $\sin(x^2+ix)$.

問題 3. (1) C を向き付けをこめて $\{\gamma(t) \mid 0 \le t \le 1\}$ と表示すると

$$\int_{-C} f(z)\,dz = \int_1^0 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = -\int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = -\int_C f(z)\,dz.$$

(2) C_k $(k=1,2)$ を向き付けをこめて $\{\gamma_k(t) \mid 0 \le t \le 1\}$ と表示すると、C_1+C_2 は

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & 0 \le t \le 1 \\ \gamma_2(t) & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

と表示できるので

$$\begin{aligned}\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz &= \int_0^2 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt + \int_1^2 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,dt + \int_0^1 f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\,dt = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.\end{aligned}$$

問題 4. 積分路の図は省略する。

(1)

$$\int_{C_1} \overline{z}\,dz = \int_0^2 \overline{t^2+it}\cdot(2t+i)\,dt = \int_0^2 (2t^3-it^2+t)\,dt = 10-8i/3.$$

(2) C_2 は $z=it$ $(0 \le t \le 2)$ 及び $z=t+2i$ $(0 \le t \le 4)$ と表示できて

$$\int_{C_2} \overline{z}\,dz = \int_0^2 \overline{it}\cdot i\,dt + \int_0^4 \overline{t+2i}\,dt = 2+(8-8i) = 10-8i.$$

(3) $a>0$ かつ $b>0$ とすると C_3 は $z=t$ $(0 \le t \le a)$, $z=a+it$ $(0 \le t \le b)$, $z=a-t+ib$ $(0 \le t \le a)$, $z=ib-it$ $(0 \le t \le b)$ と表示できて

$$\begin{aligned}\int_{C_3} \overline{z}\,dz &= \int_0^a t\,dt + \int_0^b \overline{a+it}\cdot i\,dt + \int_0^a \overline{a-t+ib}\cdot(-1)\,dt + \int_0^b \overline{ib-it}\cdot(-i)\,dt \\ &= 2i\cdot ab.\end{aligned}$$

$a<0$ かつ $b<0$ の時も同じ線積分になって、結果は $2iab$. $ab<0$ の時は逆向きの線積分になって、結果は $-2iab$.

(4) C_4 は $re^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ と表示できて

$$\int_{C_3} \overline{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \overline{re^{i\theta}}\cdot ire^{i\theta}\,d\theta = 2i\cdot\pi r^2.$$

注：(3) と (4) は次の問題 5 の結果と一致する。また (1) と (2) の差 $(10-8i/3)-(10-8i) = 16i/3$ は放物線と 2 直線で囲まれる領域の面積 $\int_0^2 y^2dy = 8/3$ の $2i$ 倍になって、やはり問題 5 の結果と一致する。

担当教員: 柳田 伸太郎 研究室: A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 5. $z = x + iy$ と表示すると求める積分は

$$\int_{\partial D} (x - iy)(dx + idy) = \int_{\partial D} (xdx + ydy) - i \int_{\partial D} (ydx - xdy).$$

ここで (2 次元の)Green の定理

$$\int_{\partial D} (Pdx + Qdy) = \iint_D (\partial_x Q - \partial_y P) dxdy$$

を使うと

$$\int_{\partial D} (x - iy)(dx + idy) = 0 - i \iint_D (-2) dxdy = 2i \times (D\ \text{の面積}).$$

問題 6. $z = \pm 1$ が被積分関数の極で、どちらも積分路に囲まれる領域に含まれるから、留数定理より求める積分は

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{2z}{z^2 - 1} + \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{2z}{z^2 - 1} = 1 + 1 = 2.$$

問題 7. 留数定理を用いることができる。被積分関数の極は $z = 2$ と $z = -1/2$ で留数は共に 1.

(1) どちらの極も積分路の囲む領域に含まれないので積分は 0.

(2) $z = -1/2$ のみ含まれるので積分は $\mathrm{Res}_{z=-1/2} f(z) = 1$.

(3) どちらの極も含まれるので積分は $\mathrm{Res}_{z=2} f(z) + \mathrm{Res}_{z=-1/2} f(z) = 2$.

問題 8. 以下各問題の被積分関数を $f(z)$ と書く。また求める積分を I と書く。

(1) 被積分関数は $z = a$ と $z = 1/a$ を極に持ち、各々の留数は $(1 - a^2)^{-1}$ 及び $(a^2 - 1)^{-1}$. 積分路の囲む領域内にある極は $|a| < 1$ なら $z = a$ のみであり、$|a| > 1$ なら $z = 1/a$ のみ。よって

$$I = \begin{cases} 2\pi i \,\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = 2\pi i/(1 - a^2) & (|a| < 1) \\ 2\pi i \,\mathrm{Res}_{z=1/a} f(z) = 2\pi i/(a^2 - 1) & (|a| > 1) \end{cases}$$

(2) $z = e^{i\theta}$ とすると $\frac{dz}{d\theta} = iz$, $\cos\theta = (z + z^{-1})/2$. これから

$$I = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z(1 + a^2) - a(z^2 + 1)} = i \int_{|z|=1} \frac{dz}{a(z - a)(z - 1/a)}$$

と書き換えられる。被積分関数は $z = a$ と $z = 1/a$ を極に持ち、各々の留数は $(a^2 - 1)^{-1}$ 及び $(1 - a^2)^{-1}$. 積分路の囲む領域内にある極は $|a| < 1$ なら $z = a$ のみであり、$|a| > 1$ なら $z = 1/a$ のみ。よって

$$I = \begin{cases} (2\pi i/i) \,\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = 2\pi/(a^2 - 1) & (|a| < 1) \\ (2\pi i/i) \,\mathrm{Res}_{z=1/a} f(z) = 2\pi/(1 - a^2) & (|a| > 1) \end{cases}.$$

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

(3) $z=e^{i\theta}$ と変数変換すると

$$2I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2az+1}.$$

被積分関数の極は $z=z_\pm:=-a\pm\sqrt{a^2-1}$ の 2 つがあるが、単位円周内にあるのは $z=z_+$ のみ。そこでの留数は $\mathrm{Res}_{z=z_+}f(z)=(z_+-z_-)^{-1}=(2\sqrt{a^2-1})^{-1}$. よって

$$I=(2\pi i/2i)\operatorname*{Res}_{z=z_+}f(z)=\frac{\pi}{2\sqrt{a^2-1}}.$$

(4) $z=0$ が被積分関数の極。Taylor 展開から

$$\frac{e^z}{z^{n+1}}=\frac{1}{z^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{1}{z}+\frac{1}{(n+1)!}+\cdots$$

なので

$$I=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=\frac{2\pi i}{n!}.$$

(5) 前問で $z=e^{i\theta}$ と変数変換すると

$$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^{n+1}}dz=\int_0^{2\pi}\frac{e^{\cos\theta}e^{i\sin\theta}}{e^{i(n+1)\theta}}ie^{i\theta}\,d\theta=i\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\big(\cos(\sin\theta-n\theta)+i\sin(\sin\theta-n\theta)\big).$$

求める積分はこれの虚部だから、前問の結果から $I=2\pi/n!$.

(6) $R>0$ とする。有向線分 $C_1(R):=[-R,R]$ と原点中心で半径 R の反時計回りの半円 $C_2(R)$ で構成される上半平面内の閉曲線を $C(R):=C_1(R)+C_2(R)$ と書く。$C(R)$ 上での $f(z):=1/(1+z^4)$ の線積分を考える。$R>1$ なら $C(R)$ に囲まれる領域に含まれる $f(z)$ の極は $z=e^{\pi i/4},e^{3\pi i/4}$. よって

$$\begin{aligned}\int_{C(R)}f(z)dz&=2\pi i\Big(\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/4}}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=e^{3\pi i/4}}f(z)\Big)\\&=2\pi i\Big(\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{\pi i/4}}+\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{3\pi i/4}}\Big)\\&=\frac{\pi}{2}e^{\pi i/2}\big(e^{-3\pi i/4}+e^{-\pi i/4}\big)=\frac{\pi}{2}\big(e^{\pi i/4}+e^{-\pi i/4}\big)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

$R\to\infty$ で $\int_{C_1(R)}f(z)dz\to I$ 及び $\int_{C_2(R)}f(z)dz\to 0$ なので $I=\pi/\sqrt{2}$.

(7) $R>1$ とする。扇形の領域

$$\{re^{i\theta}\mid 0\le r\le R,\ 0\le\theta\le 2\pi/p\}$$

の境界に正の向きづけを入れた閉曲線を $C(R)$ と書く。$f(z)=z^{q-1}/(1+z^p)$ の扇形領域内の極は $z=e^{\pi i/p}$ のみで留数は $(p\exp(\pi i(p-q)/p))^{-1}$. よって

$$\int_C f(z)dz=\frac{2\pi i}{p\exp(\pi i(p-q)/p)}=-\frac{2\pi i}{p}e^{\pi iq/p}.$$

担当教員: 柳田 伸太郎 研究室: A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

一方で $C(R)$ のうち円弧の部分を $A(R)$ と書くと

$$\int_C f(z)dz = \int_0^R f(x)dx + \int_{A(R)} f(z)dz + \int_R^0 \frac{x^{q-1}e^{2\pi i(q-1)/p}}{1+x^p} e^{2\pi i/p}dx$$
$$= (1-e^{2\pi iq/p})\int_0^R f(x)dx + \int_{A(R)} f(z)dz.$$

$p>q$ より $R\to\infty$ で $\int_{A(R)} f(z)dz \to 0$. また $R\to\infty$ で $\int_0^R f(x)dx \to I$. よって

$$I = -\frac{2\pi i}{p}\frac{e^{\pi iq/p}}{1-e^{2\pi iq/p}} = \frac{\pi}{p\sin(\pi q/p)}.$$

(8) 関数 $g(z) = e^{iaz}1+z^2$ を考える。前問 (6) と同様に上半平面内の半円型の積分路 $C(R)$ にそった線積分を考える。上半平面内の $g(z)$ の極は $z=i$ のみで留数は $e^{-a}/2i$。よって

$$\int_{C(R)} g(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} g(z) = \frac{\pi}{e^a}.$$

一方 $C(R)$ のうち円弧部分の積分は $R\to\infty$ で 0 に収束する。直線部分は

$$\int_{-R}^R g(x)dx = \int_{-R}^R f(x)dx + i\int_{-R}^R \frac{\sin(ax)}{1+x^2}dx.$$

よって $R\to\infty$ で $\int_{C(R)} g(z)dz$ の実部が I になることがわかる。以上より $I=\pi e^{-a}$.
(9) $a>0$ に対し $C(a)$ を原点中心で半径 R の反時計回りの上半平面内の半円周とする。$0<r\ll 1\ll R$ なる実数 r,R に対し有向線分 $[r,R]$, $C(R)$, $[-R,-r]$, $-C(r)$ を結んでできる閉曲線を C と書く。C 上で $g(z) := e^{iz}/z$ を積分すると、C の囲む領域内に $g(z)$ は極を持たないので $\int_C g(z)dz = 0$. 一方 C を各部分に分解して考えると

$$\int_C g(z)dz = \int_r^R g(z)dz + \int_{C(R)} g(z)dz + \int_{-R}^{-r} g(z)dz - \int_{C(r)} g(z)dz$$
$$= 2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}dx + \int_{C(R)} g(z)dz + \int_{C(r)} g(z)dz.$$

ここで

$$\int_{C(r)} g(z)dz = \int_0^\pi e^{ir\exp(i\theta)}id\theta \xrightarrow{r\to 0} i\pi, \quad \lim_{R\to\infty}\int_{C(R)} g(z)dz = 0$$

に注意する。以上を合わせると $I = \pi i/2i = \pi/2$.
(10) $a>0$ とする。

$$g(z) := \frac{\log(z+ia)}{1+z^2}$$

を前問 (6), (8) と同様に上半平面内の半円型の積分路 $C(R)$ にそって線積分する。但し log の枝は、$z=-ia$ から負の実軸に平行に branch cut を入れ $\log(1)=0$ となるように取る (積分路上で 1 価になるように取っている)。上半平面内の $g(z)$ の極は $z=i$ のみで留数は $\log(\sqrt{i+ia})/2i$. よって

$$\int_{C(R)} g(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} g(z) = \pi\log(i(1+a)).$$

一方 $C(R)$ の円弧部分での積分は $R\to\infty$ で 0 に収束する (任意の $k>0$ で $\log R/R^k\to 0$ となることから従う)。よって

$$\int_{-\infty}^{\infty}\log(x+ia)f(x)dx=\pi\log(i(1+a)).$$

この両辺の実部をとると $\mathrm{Re}(\log(x+ia))=\log|x+ia|=\log\sqrt{x^2+a^2}$ だから

$$I=\mathrm{Re}\big(\pi\log(i(1+a))\big)=\pi\log(1+a).$$

(11) $0<r\ll 1\ll R$ なる実数 r,R をとり図 1 のような積分路 C を考える。C の外周は反時計回りの半径 R の円周 $C(R)$、内周は時計回りの半径 r の円周 $C'(r)$ である。$g(z):=1/z(1+z)$ とすると $z^\alpha g(z)$ は C の囲む領域内では $z=-1$ のみを極に持つので

$$\int_C z^\alpha g(z)dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=-1}z^\alpha g(z)=2\pi i(-1)^{\alpha-1}=-2\pi ie^{i\pi\alpha}.$$

一方で $\int_C$ を分解して考えると

$$\begin{aligned}\int_C z^\alpha g(z)dz&=\int_r^R x^\alpha g(x)dx+\int_{C(R)}z^\alpha g(z)dz+\int_R^r e^{2\pi\alpha i}x^\alpha g(x)dx+\int_{C'(r)}z^\alpha g(z)dz\\&=(1-e^{2\pi\alpha i})\int_r^R x^\alpha g(x)dx+\int_{C(R)}z^\alpha g(z)dz+\int_{C'(r)}z^\alpha g(z)dz.\end{aligned}$$

$R\to\infty$ 及び $r\to 0$ で各積分が 0 に収束することが示せる。同じ極限で $\int_r^R$ は I に収束するので

$$I=\frac{-2\pi ie^{i\pi\alpha}}{1-e^{2\pi\alpha i}}=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

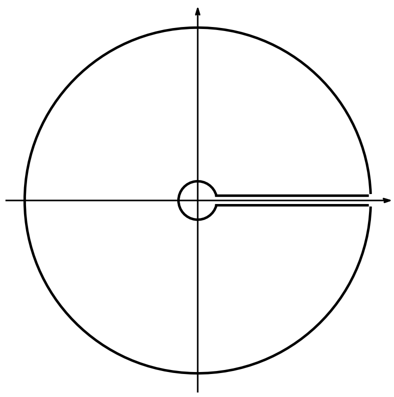

図 1: 問題 8(11) の積分路

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 9. D が実軸に関し対称なので $z \in D \iff \overline{z} \in D$. よって $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$ は意味を持つ。$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 及び $g(z) = \widetilde{u}(x,y) + i\widetilde{v}(x,y)$ と書くと

$$\widetilde{u}(x,y) = u(x,-y), \quad \widetilde{v}(x,y) = -v(x,-y).$$

また $f(z)$ は正則なので Cauchy-Riemann の方程式

$$u_x(x,y) = v_y(x,y), \quad u_y(x,y) = -v_x(x,y)$$

が成立する。従って $\widetilde{u}, \widetilde{v}$ に関する Cauchy-Riemann の方程式

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_x(x,y) &= u_x(x,-y) = v_y(x,-y) = \widetilde{v}_y(x,y), \\ \widetilde{u}_y(x,y) &= -u_y(x,-y) = v_x(x,-y) = -\widetilde{v}_x(x,y) \end{aligned}$$

が成立する。また u, v は C^1 級なので $\widetilde{u}, \widetilde{v}$ も C^1 級。よって $g(z)$ は D 上正則である。

問題 10. $w := 1/z$ とすると $dz/(z-a) = dw/w(1-aw)$. また単位円周上では $w = \overline{z}$ となることに注意すると

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\overline{f(z)}}{z-a}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{\overline{f(\overline{w})}}{w(1-aw)}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \overline{f(\overline{w})}\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{w-1/a}\right)dw.$$

前問 9 より $\overline{f(\overline{w})}$ は w の正則関数なので Cauchy の積分定理が適用できる。従って結果は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\overline{f(z)}}{z-a}dz = \begin{cases} \overline{f(0)} & (|a|<1) \\ \overline{f(0)} - \overline{f(1/\overline{a})} & (|a|>1) \end{cases}.$$

$|a| = 1$ だと一般に積分は発散する。