担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

複素積分に関する補足問題集

作成日: 11/24/2016　Version: 1.0　配布日: 12/01/2016

このセットは複素積分に関する補足問題集である。

問題 1. 次の実変数複素数値関数 $f(t)$ の微分を計算せよ.

(1) $(5+6it)^{50}$.　(2) $\exp(t^2+it)$.　(3) $\cos(\log(\sin(it)))$.

問題 2. 次の実変数複素数値関数 $f(t)$ に対して積分 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ を計算せよ。

(1) $3i(1+it)^2$.　(2) $ie^{it}/(1+e^{it})$.　(3) $(2t+i)\cos(t^2+it)$.

問題 3. 複素積分の以下の性質を厳密に示せ。

(1) $\displaystyle\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz$.　(2) $\displaystyle\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$.

問題 4. 積分 $\displaystyle\int_{C_j} \overline{z}\,dz$ を次で与えられる積分路上で積分せよ。またその積分路を図示せよ。

(C_1) $z=0$ から $z=4+2i$ までの曲線 $z=t^2+it\ \ (0 \le t \le 2)$.

(C_2) $z=0$ と $z=2i$ を直線で結んでから $z=2i$ から $z=4+2i$ まで直線で結ぶ。

(C_3) 四点 $0, a, ib, a+ib$ を頂点とする左回りの長方形。

(C_4) 原点中心で半径 r の左回りの円周。

問題 5. 領域 D の境界 ∂D は区分的に滑らかな有限個の曲線からなるものとし、正の向きをつけて積分路と思うことにする。このとき次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\partial D} \overline{z}\,dz = 2i \times (D\text{ の面積}).$$

問題 6. 楕円 $x^2/4+y^2=1$ に正の向きを付けた積分路 C に対して以下の積分を計算せよ。

$$\int_C \frac{2z}{z^2-1}\frac{dz}{2\pi i}.$$

問題 7. 次の各場合 (1)–(3) について以下の積分を計算せよ。

$$\int_{|z|=r} \frac{4z-3}{2z^2-3z-2}\frac{dz}{2\pi i}.$$

(1) $r=1/4$.　(2) $r=1$.　(3) $r=4$.

担当教員: 柳田 伸太郎 研究室: A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 8. 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)(1-az)} \qquad (a>0,\ a\neq 1).$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} \qquad (a>0,\ a\neq 1).$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} \qquad (a>1).$

(4) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}}\,dz.$

(5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cdot\cos(\sin\theta-n\theta)\,d\theta.$

(6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$

(7) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{q-1}}{1+x^p}\,dx$ $\quad$ (p,q は整数でかつ $0<q<p$).

(8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx.$

(9) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$

(10) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log\sqrt{x^2+a^2}}{1+x^2}\,dx.$

(11) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{x(1+x)}\,dx.$

問題 9. 実軸に対称な領域 D で正則な関数 $f(z)$ について、$\overline{f(\overline{z})}$ も D で正則であることを示せ。

問題 10. 単位円板の近傍で正則な関数 f に対して以下の積分を求めよ。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\overline{f(z)}}{z-a}.$$

問題 11. 開円板 $|z|<1$ で正則な関数 $f(z)$ が決して値 0 を取らなければ、$|z|<1$ で正則な関数 $g(z)$ が存在して $f(z)=e^{g(z)}$ と表されることを証明せよ。