

小テスト (01/26)

作成日: 01/12/2017 更新日: 01/23/2017 Version: 1.0

配布日: 01/26/2017

学生番号 _____ 名前 _____

問題 1. f を領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上で正則な複素関数とする。

- (1) f についての Cauchy-Riemann の関係式を書け。
- (2) f がいたる所で実数値を取るならば f は定数であることを示せ。
- (3) $|f|$ が定数ならば f が定数であることを示せ。

解答

(1)

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

または $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ と実部と虚部に分けた時に

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

(2) f が正則なので $\partial f / \partial \bar{z} = 0$. この両辺の複素共役を取ると $\bar{f} = f$ なので $\partial f / \partial z = 0$. よって f は定数。

(3) $|f| = 0$ なら $f = 0$ だから $|f| = c \in \mathbb{R}_{>0}$ として良い。 $z_0 \in D$ の近傍で f は C^1 級の実数値関数 $\theta(z)$ により $f(z) = ce^{i\theta(z)}$ と書ける。すると $0 = \partial f / \partial \bar{z} = ice^{i\theta(z)} \partial \theta / \partial \bar{z}$ なので z_0 の近傍で $\partial \theta / \partial \bar{z} = 0$. θ は実数値だから設問 (2) より定数。よって f は z_0 の近傍で定数。従って一致の定理により f は D 上で定数。

2点+3点+5点で採点しました。平均点は3.9点でした。

(2) は $f = u + iv$ と表示しておいて議論しても勿論示せます。

また (3) は $|f|^2 = u^2 + v^2$ が定数であることと (1) を組み合わせて示すこともできます。