担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

解答 (コンパクト集合)

作成日: 12/18/2016　Version: 0.1

問題 1.

(1) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して U_k は $\mathbb{R}$ の開集合だから任意の $x \in (a,b)$ に対してある $\varepsilon > 0$ が存在して $a+\varepsilon < x < b-\varepsilon$ となる。よって $\delta/k < \varepsilon$ となる k を取れば $a+\delta/k < a+\varepsilon < x < b-\varepsilon < b-\delta/k$ となるから $x \in U_k$ である。従って $(a,b) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ だから $\{U_k \mid k=1,2\dots\}$ は (a,b) の開被覆である。

(2) $k \le l$ のとき $U_k \subset U_l$ に注意する。任意の $n \in \mathbb{N}$ と n 個の $k_1,\dots,k_n \in \mathbb{N}$ を取る。$K = \max\{k_1,\dots,k_n\}$ とすると $U_{k_i} \subset U_K$ が任意の $i=1,\dots,n$ について成り立つ。$K \in \{k_1,\dots,k_n\}$ だから $U_K = \bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i}$ が成り立つ。ところが $a+\delta/K \notin U_K$ だが $a+\delta/K \in (a,b)$ である従って $(a,b) \neq U_K = \bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i}$ となる。

問題 2.

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ を取る。$[|x|]$ を $|x|$ 以下の最大の整数とし $k=[|x|]+1$ とおくと $|x| < k$ である。つまり $x \in U_k$ となるから $\mathbb{R}^n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ が示せた。

(2) 任意の $k,l \in \mathbb{N}$,$k \le l$ に対して $U_k \subset U_l$ が成り立つ。任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の n 個の $k_1,\dots,k_n \in \mathbb{N}$ を取る。$K = \max\{k_1,\dots,k_n\}$ とおくと $U_{k_i} \subset U_K$ $(i=1,\dots,n)$ となり $\bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i} = U_K$ が成り立つ。ところが ${}^t(K+1,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n$ だが ${}^t(K+1,0,\dots,0) \notin U_K$ だから $U_K \neq \mathbb{R}^n$ である。

問題 3.

(1) 仮定から $a \in [a,b] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ だからある $\nu \in \Lambda$ が存在して $a \in U_\nu$. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して U_λ は $\mathbb{R}$ の開集合だから、ある $\delta > 0$ $(a+2\delta < b)$ が存在して $(a-2\delta, a+2\delta) \subset U_\nu$ となる。特に $[a,a+\delta] \subset U_\nu$,$a+\delta < b$ より $a+\delta \in M \cap (a,b] \neq \emptyset$ となる。

(2) $x_o = \sup\{x \mid x \in M\}$ とおく。任意の $x \in M$ に対して $a \le x \le b$ だから $x_o \le b$。また設問 (1) よりある $\delta > 0$ が存在して $a+\delta \in M$ だから $a < a+\delta \le x_o$ となる。

(3) 設問 (2) より $x_o \in [a,b] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ である。よってある $\mu \in \Lambda$ が存在して $x_o \in U_\mu$ となる。U_μ が開集合だから $\varepsilon > 0$ を $(x_o-\varepsilon, x_o+\varepsilon) \subset U_\mu$ と取る。上限の定義により $x_o - \varepsilon < x_1 \le x_o$ となる $x_1 \in M$ が存在する。M の定義からある有限個の $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \Lambda$ が存在して $[a,x_1] \subset U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}$ となる。よって $[a,x_o] \subset [a,x_1] \cup (x_o-\varepsilon, x_o+\varepsilon) \subset U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n} \cup U_\mu$ となる。よって $x_o \in M$ である。

(4) $x_o < b$ と仮定して矛盾を導く。設問 (3) の解答にあるように $x_o \in U_\mu$ となる $\mu \in \Lambda$ を取り、$(x_o-2\varepsilon, x_o+2\varepsilon) \subset U_\mu$ となる $x_o+2\varepsilon < b$ を満たす $\varepsilon > 0$ を取る。さらに $x_o-\varepsilon < x_1 \le x_o$ となる $x_1 \in M$ を取る。そして有限個の $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \Lambda$ で $[a,x_1] \subset U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}$ となるものを取る。このとき $x_o+\varepsilon \in [a,b]$ であり $[a,x_o+\varepsilon] = [a,x_1] \cup (x_o-2\varepsilon, x_o+2\varepsilon) \subset U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n} \cup U_\mu$ となる。よって $x_o+\varepsilon \in M$ だが x_o が M の上限であることに矛盾する。よって $x_o = b$. 従って $b \in M$ だから M の定義から有限個の $\lambda_1,\dots,\lambda_K$ が存在して $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{K} U_{\lambda_i}$ となる。

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 4.

(1) X を有限集合として $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ とする。また $\mathcal{O}$ を X の任意の位相とする。$\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を位相 $\mathcal{O}$ における X の開被覆とする。つまり $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ である。このとき任意の $i = 1, \ldots, n$ に対して $x_i \in U_{\lambda_i}$ となる $\lambda_i \in \Lambda$ が存在する。よって $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}$ となる。従って $(X, \mathcal{O})$ はコンパクト空間である。

(2) $(X, 2^X)$ がコンパクト空間であると仮定する。任意の $x \in X$ に対して $\{x\} \in 2^X$, つまり $\{x\}$ は開集合である。また $X = \bigcup_{x\in X}\{x\}$ となるから $\{\{x\} \mid x \in X\}$ は X の開被覆である。$(X, 2^X)$ がコンパクト空間だから、ある $x_1, \ldots, x_n \in X$ が存在して $X = \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_n\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ となる。つまり X は有限集合である。逆に X が有限集合なら設問 (1) より $(X, 2^X)$ はコンパクト空間となる。

問題 5. A を $(X, \mathcal{O})$ のコンパクト集合とする。$\{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $(A, \mathcal{O}_A)$ における A の開被覆とする。任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $V_\lambda \in \mathcal{O}_A$ だから相対位相 $\mathcal{O}_A$ の定義により $V_\lambda = A \cap U_\lambda$ となる $U_\lambda \in \mathcal{O}$ が存在する。$V_\lambda \subset U_\lambda$ より $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ となる。つまり $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は A の $(X, \mathcal{O})$ における開被覆である。A が $(X, \mathcal{O})$ のコンパクト集合だから、ある $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在して $A \subset U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}$ となる。特に

$$A = A \cap (U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}) = (A \cap U_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup (A \cap U_{\lambda_n}) = V_{\lambda_1} \cup \cdots \cup V_{\lambda_n}$$

となる。よって $(A, \mathcal{O}_A)$ はコンパクト空間である。

次に $(A, \mathcal{O}_A)$ がコンパクト空間であるとする。$\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を A の X における開被覆とする。このとき $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ だから $A = A \cap \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A \cap U_\lambda)$ となる。任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $A \cap U_\lambda \in \mathcal{O}_A$ だから $\{A \cap U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は $(A, \mathcal{O}_A)$ における A の開被覆である。$(A, \mathcal{O}_A)$ はコンパクト空間だから、ある有限集合 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在して $A = (A \cap U_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup (A \cap U_{\lambda_n})$ となる。特に $A \subset U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}$ である。よって A は $(X, \mathcal{O})$ のコンパクト集合である。

問題 6. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし $A \subset B \subset X$ とする。B の $(X, \mathcal{O})$ における相対位相を $\mathcal{O}_B$ とする。まず A が $(X, \mathcal{O})$ のコンパクト集合であるとし、$\{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $(B, \mathcal{O}_B)$ における A の開被覆とする。任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $V_\lambda \in \mathcal{O}_B$ だから、相対位相の定義により、ある $U_\lambda \in \mathcal{O}$ が存在して $V_\lambda = B \cap U_\lambda$ となる。よって $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(B \cap U_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ となるから $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は A の $(X, \mathcal{O})$ における開被覆である。A は $(X, \mathcal{O})$ のコンパクト集合だから、ある $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在して $A \subset U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}$ となる。よって

$$A \subset B \cap (U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}) = (B \cap U_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup (B \cap U_{\lambda_n}) = V_{\lambda_1} \cup \cdots \cup V_{\lambda_n}$$

となる。よって A は $(B, \mathcal{O}_B)$ におけるコンパクト集合である。次に A が $(B, \mathcal{O}_B)$ のコンパクト集合であるとし、$\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を A の $(X, \mathcal{O})$ における開被覆とする。このとき $A \subset B \cap \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(B \cap U_\lambda)$ であり, $B \cap U_\lambda \in \mathcal{O}_B$ だから $\{B \cap U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は A の $(B, \mathcal{O}_B)$ における開被覆である。A は $(B, \mathcal{O}_B)$ のコンパクト集合だから、ある $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在して $A \subset (B \cap U_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup (B \cap U_{\lambda_n}) = B \cap (U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}) \subset U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}$ となる。従って A は $(X, \mathcal{O})$ のコンパクト集合である。

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

補足 1. 問題 6 は次の簡単な事実を用いれば問題 5 から従う。

> $(X,\mathcal{O})$ を位相空間とし $A \subset B \subset X$ とする。$\mathcal{O}_B$ を B の $(X,\mathcal{O})$ における相対位相とする。このとき A の $(X,\mathcal{O})$ における相対位相 $\mathcal{O}_A$ と A の $(B,\mathcal{O}_B)$ における相対位相 $(\mathcal{O}_B)_A$ とは一致する。

実際この事実を認めると、問題 5 より A が $(X,\mathcal{O})$ のコンパクト集合であることと $(A,\mathcal{O}_A) = (A,(\mathcal{O}_B)_A)$ がコンパクト空間であることとは同値。よって再び問題 5 よりこれは A が $(B,\mathcal{O}_B)$ のコンパクト集合であることと同値になる。

上記の事実を示しておく。$U \in (\mathcal{O}_B)_A$ とする。相対位相の定義からある $V \in \mathcal{O}_B$ が存在して $U = A \cap V$ となる。$\mathcal{O}_B$ は B の $(X,\mathcal{O})$ における相対位相ですから、ある $W \in \mathcal{O}$ が存在して $V = B \cap W$ となる。よって $U = A \cap V = A \cap B \cap W$ となるが $A \subset B$ より $U = A \cap W$. 従って $U \in \mathcal{O}_A$. 次に $U \in \mathcal{O}_A$ とする。この時 $U = A \cap W$ となる $W \in \mathcal{O}$ が存在する。$A \subset B$ だから $U = A \cap W = A \cap B \cap W = A \cap (B \cap W)$. $V := B \cap W \in \mathcal{O}_B$ なので $U = A \cap V$ より $U \in (\mathcal{O}_B)_A$ となる。よって $\mathcal{O}_A = (\mathcal{O}_B)_A$ が分かった。

問題 7. 以下の設問では定理 1 (2) より $\mathbb{R}^2$ の部分集合について, コンパクト集合であることと (Euclid 距離について) 有界閉集合であることとが同値であることを用いる。

(1) A はコンパクト集合である。それを示す。$g(x,y) := x^4 + y^4 + 3xy$ は $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数である。一点からなる集合 $\{2\} \subset \mathbb{R}$ は閉集合だから $g^{-1}(2) = A$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合。次に ${}^t(x,y) \in A$ とし $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ($r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$) と極座標表示する。$r = (x^2+y^2)^{1/2}$ である。すると

$$\begin{aligned} 2 &= g(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) + r^2 \sin\theta\cos\theta \\ &= r^4(2\sin^4\theta - 2\sin^2\theta + 1) + \frac{r^2}{2}\sin(2\theta) = r^4(2(\sin^2\theta - 1/2)^2 + 1/2) + \frac{r^2}{2}\sin(2\theta) \\ &\geq \frac{r^2}{2}(r^2 - 1). \end{aligned}$$

従って $r^2(r^2-1) \leq 4$ となり $r^2 \leq (1+\sqrt{17})/2$. つまり ${}^t(x,y) \in A$ ならば $x^2+y^2 \leq (1+\sqrt{17})/2$ だから A は有界。よって A は有界閉集合だからコンパクト集合となる。

(2) $f : [0,1] \to [0,1]$ が連続関数のとき $B = \{{}^t(x,f(x)) \mid x \in [0,1]\}$ はコンパクト集合である。これを示す。$\{{}^t(x_n,f(x_n))\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ を点 ${}^t(a,b) \in \mathbb{R}^2$ に収束する点列とする。このとき $x_n \in [0,1]$,$x_n \to a$ $(n \to \infty)$ だから $a \in [0,1]$ であり、f が連続だから $f(x_n) \to f(a) = b$ となる。つまり ${}^t(a,b) = {}^t(a,f(a)) \in B$ となるから B は閉集合。また仮定から $x \in [0,1]$ ならば $f(x) \in [0,1]$ だから $B \subset [0,1] \times [0,1]$ となる。従って $B \subset \{{}^t(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 2\}$ だから B は有界。よって B は有界閉集合だからコンパクト集合である。

(3) $C = (0,1] \times [0,1]$ はコンパクト集合ではない。設問 (2) と同様 C は有界。しかし $\{{}^t(1/n,1)\}_{n=1}^{\infty} \subset C$ であるが, ${}^t(1/n,1) \to {}^t(0,1) \notin C$ だから C は閉集合ではない。

(4) $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, $D_n = \{{}^t(1/n, y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$ はコンパクト集合ではない。$D \subset [0,1] \times [0,1]$ だから D は有界。しかし $\{{}^t(1/n,1)\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ であり, ${}^t(1/n,1) \to {}^t(0,1) \notin D$ である。よって D は閉集合ではない。

問題 8. $(X, \mathcal{O})$ をコンパクト空間、$A \subset X$ を閉集合、$\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を A の開被覆とする。

(1) 仮定から $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ であり $X = A^c \cup A \subset A^c \cup \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ だから主張が成り立つ。

(2) A は X の閉集合だから A^c は X の開集合。設問 (1) より $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \cup \{A^c\}$ は X の開被覆である。従って有限個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_K \in \Lambda$ が存在して $X = A^c \cup U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_K}$ となる。このとき $A \subset X = A^c \cup U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_K}$ であるが, 任意の $a \in A$ に対して $a \notin A^c$ だから $a \in U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_K}$ となる。つまり $A \subset U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_K}$ である。従って A は X のコンパクト集合である。

問題 9.

(1) $x \in A^c$ とする。任意の $a \in A$ に対して $a \in U_a(x)$,$U_a(x) \in \mathcal{O}$ だから $A \subset \bigcup_{a\in A} U_a(x)$。よって $\{U_a(x) \mid a \in A\}$ は A の開被覆である。A は $(X, \mathcal{O})$ のコンパクト集合だから有限個の $a_1, \ldots, a_K \in A$ が存在して $A \subset \bigcup_{i=1}^{K} U_{a_i}(x)$ となる。

(2) 任意の $i = 1, \ldots, K$ に対して $x \in V_{a_i}(x)$ より $x \in V_x$ である。任意の $y \in V_x$ を取る。任意の $i = 1, \ldots, K$ に対して $y \in V_{a_i}(x)$ である。もし $y \in A$ ならばある $j(1 \leq j \leq K)$ が存在して $y \in U_{a_j}(x)$ となるが、$y \in U_{a_j}(x) \cap V_{a_j}(x)$ となり $U_{a_j}(x) \cap V_{a_j}(x) = \emptyset$ に矛盾する。よって $y \notin A$ より $y \in A^c$。従って $x \in V_x \subset A^c$ である。V_x は開集合であり A^c の任意の点が内点であるから A^c は X の開集合であり A は閉集合である。

問題 10.

(1) 定理 1 (5) より $f(X)$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合。よって定理 1 (2) より $f(X)$ は $\mathbb{R}$ の有界閉集合である。

(2) $a = \inf\{f(x) \mid x \in X\}$ だから任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in X$ で $f(x_n) < a + 1/n$ となるものが存在する。また $a \leq f(x_n)$ だから $a \leq f(x_n) < a + 1/n$ より数列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束する。$\{f(x_n)\} \subset f(X)$ であり $\{f(x_n)\}$ は a に収束し、$f(X)$ は $\mathbb{R}$ の閉集合だから (プリント Y102 問題 11 より) $a \in f(X)$ である。$b \in f(X)$ も同様である。

(3) 設問 (2) より $f(x_1) = a$, $f(x_2) = b$ となる $x_1, x_2 \in f(X)$ が存在する。上限と下限の定義から任意の $x \in X$ に対して $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$. よって定理 1 (6) が従う。

問題 11. 以下では $(X, \mathcal{O}(X))$ をコンパクト空間、$(Y, \mathcal{O}(Y))$ を Hausdorff 空間とする。

(1) $f : X \to Y$ を連続写像、A を X の閉集合とする。このとき定理 1 (3) より A は X のコンパクト集合である。よって定理 1 (5) より $f(A)$ は Y のコンパクト集合である。従って定理 1 (4) より $f(A)$ は Y の閉集合となる。よって定理 1 (7) が示された。

(2) $f : X \to Y$ を連続な全単射とし任意の $U \in \mathcal{O}(X)$ をとる。$X \setminus U$ は X の閉集合だから定理 1 (7) より $f(X \setminus U)$ は Y の閉集合。f が全単射だから $f(X \setminus U) = Y \setminus f(U)$ は Y の閉集合。よって $f(U)$ は Y の開集合。従って $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$, つまり f^{-1} による $U \subset X$ の逆像は Y で開集合だから $f^{-1} : Y \to X$ は連続。$f : X \to Y$ は連続な全単射で $f^{-1} : Y \to X$ が連続だから f は同相写像。よって定理 1 (8) が示された。

問題 12. $x, y \in [0, 1]$, $x \sim y$ とする。もし $x = y$ なら $e^{2\pi ix} = e^{2\pi iy}$ となる。また $x, y \in \{0, 1\}$ なら $e^{2\pi ix} = e^{2\pi iy} = 1$ である。つまり $x \sim y$ ならば $e^{2\pi ix} = e^{2\pi iy}$ だからプリント Y105 問題 4 より写像 $f : Y \to S^1$, $f([x]) = e^{2\pi ix}$ は well-defined である。定義から $f \circ p(x) = e^{2\pi ix}$ $(x \in [0, 1])$ だから $f \circ p : [0, 1] \to S^1$ は連続。よってプリント Y111 問題 17 (4) より $f : Y \to S^1$ は連続である。プリント Y111 問題 13 (2) より f は全射。また $f([x]) = f([y])$ $(x, y \in [0, 1])$ とすると $e^{2\pi ix} = e^{2\pi iy}$ より $x - y \in \mathbb{Z}$ となる。ところが $x, y \in [0, 1]$ だから $-1 \le x - y \le 1$。従って $x - y$ は $-1, 0, 1$ のどれかに等しい。$x - y = -1$ のときは $x = 0$,$y = 1$。$x - y = 0$ のときは $x = y$. $x - y = 1$ のときは $x = 1$,$y = 0$ となる。つまり $x \sim y$ だから $[x] = [y]$ となり f は単射。以上より $f : Y \to S^1$ は連続な全単射である。$\mathbb{C}$ は Euclid 距離から位相が定まっているから Hausdorff 空間である (プリント Y111 問題 20 (1))。従ってその部分空間である S^1 も Hausdorff 空間である (プリント Y111 問題 20 (2))。またプリント Y111 問題 17 より射影 $p : [0, 1] \to Y = [0, 1]/\sim$ は Y の商位相について全射な連続写像である。従って定理 1 (5) より $Y = p([0, 1])$ は Y のコンパクト集合となり Y は商位相についてコンパクト空間となる。従って定理 1 (8) より f は同相写像となる。

補足 2. 問題 12 と関連する前回のプリント Y111 問題 19 を、定理 1 (5),(8) を用いて簡単に証明できる。プリント Y111 問題 19 では $x, y \in \mathbb{R}$ に対して「$x \approx y \iff x - y \in \mathbb{Z}$」と定義した。この同値関係による商集合への射影を $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\approx$ としよう。このとき $\pi([0, 1]) = \mathbb{R}/\approx$ である。実際任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $t = x - [x]$ とおくと $t \in [0, 1]$ で $\pi(x) = \pi(t)$ となる。$[0, 1]$ はコンパクト集合で π は連続だから定理 1 (5) より $\pi([0, 1]) = \mathbb{R}/\approx$ はコンパクト空間。そこで $f : \mathbb{R} \to S^1$ を $f(x) := e^{2\pi ix}$ で定めると f は連続な全射で $f(x) = f(y) \iff x \approx y$」を満たす。従って $F : \mathbb{R}/\approx \to S^1$ を $F(\pi(x)) := f(x)$ と定義すると F は写像として well-defined で全単射 (Y105 問題 9)。$F \circ \pi = f$ より F は連続。S^1 は Hausdorff 空間で $F : \mathbb{R}/\approx \to S^1$ は連続な全単射だから定理 1 (8) より F は同相写像。

問題 13.

(1) $f : X \to Y$ を同相写像とすると $f : X \to Y$ は連続な全射。従って定理 1 (5) より $f(X) = Y$ は Y のコンパクト集合である。つまり Y はコンパクト空間である。

(2) S^1 と $[0, 1)$ は同相ではない。以下でこれを示す。$\rho : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$,$\rho(z) = |z|$ は $\mathbb{C}$ 上の連続関数である。また $\{1\} \subset \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合であるから $\rho^{-1}(1) = S^1$ は $\mathbb{C}$ の閉集合である。S^1 は $\mathbb{C}$ のユークリッド距離に関して有界であるから S^1 は $\mathbb{C}$ の有界閉集合。よって定理 1, (2) より S^1 はコンパクト集合である。

一方 $n \in \mathbb{N}$ に対して $U_n := [0, 1-1/(n+1)) \subset [0, 1)$ とおく。$V_n = (-1+1/(n+1), 1-1/(n+1))$ は $\mathbb{R}$ の開集合であり $V_n \cap [0, 1) = U_n$ となるから U_n は $[0, 1)$ の相対位相で開

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

集合。任意の $x \in [0,1)$ に対して $x<1$ より $x<1-1/(n+1)$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在し $x \in U_n$ となる。よって $[0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ である。つまり $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は $[0,1)$ の開被覆。もし $[0,1)$ がコンパクト集合ならある有限個の自然数 $n_1, \ldots, n_L$ $(n_1 < \cdots < n_L)$ が存在して $[0,1) = \bigcup_{i=1}^{L} U_{n_i}$ となる。定義から $n \leq m$ ならば $U_n \subset U_m$ が成り立つ。従って $\bigcup_{i=1}^{L} U_{n_i} \subset U_{n_L}$. つまり $[0,1) \subset U_{n_L}$ だが $U_{n_L} \subset [0,1)$ だから $[0,1) = U_{n_L}$ となる。しかし $1-1/(n_L+2) \notin U_{n_L}$,$1-1/(n_L+2) \in [0,1)$ より矛盾である。よって $[0,1)$ はコンパクト集合ではなく、従って設問 (1) より S^1 と同相ではない。

問題 14. $[x],[y] \in \mathbb{R}P^n$ $(x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ とする。このとき同値関係 $\sim$ の定義から $y = cx$ となる $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ が存在する。従って $\ell(x) = \ell(y)$ となる。よって写像 $\ell : \mathbb{R}P^n \to \mathcal{L}$, $\ell([x]) = \ell(x)$ は well-defined. 任意の $L \in \mathcal{L}$ を取る。L は $\mathbb{R}^{n+1}$ の原点を通る直線だからあるベクトル $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ が存在して $L = \mathbb{R}x$ となる。従って $L = \ell(x)$ だから ℓ は全射。$[x],[y] \in \mathbb{R}P^n$,$\ell(x) = \ell(y)$ と仮定する。特に $x, y \neq 0$ に注意。$y \in \mathbb{R}x$ より $y = tx$ となる $t \in \mathbb{R}$ が取れる。$y \neq 0$ より $t \neq 0$。従って $x \sim y$ となり $[x] = [y]$ である。よって $\ell : \mathbb{R}P^n \to \mathcal{L}$ は単射である。

問題 15.

(1) 任意の $x \in S^n$ に対して $x = x$ だから $x \approx x$。また $x \approx y$ となる $x, y \in S^n$ に対して $y = x$ または $y = -x$ である。特に $x = y$ または $x = -y$ だから $y \approx x$。また $x, y, z \in S^n$ が $x \approx y$,$y \approx z$ とする。$z = y$ のとき $x \approx y$ より $z = y = \pm x$ となるから $x \approx z$. $z = -y$ のとき $y = x$ なら $z = -x$. $y = -x$ なら $z = x$ となる。よって $x \approx z$ となる。従って $\approx$ は S^n 上の同値関係である。

(2) 射影 $\pi : S^n \to X = S^n/\!\approx$ は π から定まる X の商位相について連続であった (プリント Y111 問題 17)。また射影の定義から π は全射である。よって定理 1 (5) より $X = \pi(S^n)$ は X のコンパクト集合である。

問題 16.

(1) $x, y \in S^n$,$x \approx y$ とする。このとき $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ であり $y = \pm x$ だから $x \sim y$。よって $p(x) = p(y)$。特に $F(x) = F(y)$ となる。従って $f : X \to \mathbb{R}P^n$ を $f(\pi(x)) = F(x)$ と定義すると、プリント Y105 問題 4 より f は写像として well-defined であり、$F(x) = f \circ \pi(x)$ が任意の $x \in S^n$ に対して成り立つ。

(2) $F(x) = p \circ \iota(x)$ であり、定義から包含写像 $\iota : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ は連続。そして射影 $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$ は $\mathbb{R}P^n$ の商位相の定義から連続である。従ってそれら連続写像の合成である $F : S^n \to \mathbb{R}P^n$ も連続。よってプリント Y111 問題 17 より設問 (1) の写像 $f : X \to \mathbb{R}P^n$ も連続である。

補足 3. 位相空間 X の部分空間 $A \subset X$ に対して包含写像 $\iota : A \to X$, $\iota(x) = x$ $(x \in A)$ は連続である。実際 X の任意の開集合 U に対して $\iota^{-1}(U) = A \cap U$ となり、これは部分空間 A の開集合である。

担当教員: 柳田 伸太郎 研究室: A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 17.

(1) $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $x \sim y$ とする。このとき $y = cx$ となる $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ が存在する。よって $\psi(y) = y/|y| = (cx)/|cx| = \pm x/|x| = \pm\psi(x)$ より $\psi(x) \approx \psi(y)$。従って $G(x) = \pi\circ\psi(x) = \pi\circ\psi(y) = G(y)$ だからプリント Y105 問題 4 より $[x] = p(x) \in \mathbb{R}P^n$ $(x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ に対して $g([x]) = G(x)$ は写像 $g : \mathbb{R}P^n \to X$ として well-defined である。また定義から明らかに $G(x) = g \circ p(x)$ が任意の $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ が成り立つ。

(2) まず $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ が連続であることを示す。以下の二つの写像を考える。

$$\alpha : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad \alpha(x) = (x, 1/|x|)。$$
$$\beta : (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad \beta(x, t) = tx。$$

$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上の関数 $x \mapsto 1/|x|$ は連続だから $\alpha : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ は連続。また β も連続である。従って合成写像 $\beta \circ \alpha : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ は連続。ところが任意の $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ に対して $\psi(x) = \beta \circ \alpha(x)$ が成り立つから $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ は連続。また射影 $\pi : S^n \to X$ は連続だから $G = \pi \circ \psi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to X$ は連続。よって前問と同様に $g : \mathbb{R}P^n \to X$ は連続。

(3) 任意の $[x] \in \mathbb{R}P^n$ を取る。ただし $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ であり,$[x] = p(x)$ である。このとき $g([x]) = g(p(x)) = G(x) = \pi(x/|x|)$ となる。よって $f \circ g([x]) = f(\pi(x/|x|)) = F(x/|x|) = p(x/|x|) = [x/|x|]$ であるが、$x/|x| \sim x$ だから $[x] = [x/|x|]$ より $f \circ g([x]) = [x]$ となる。従って $f \circ g$ は $\mathbb{R}P^n$ の恒等写像である。また任意の $\pi(x) \in X$ $(x \in S^n)$ に対して $f(\pi(x)) = F(x) = p(x)$ より $g \circ f(\pi(x)) = g(p(x)) = G(x) = \pi(x/|x|)$ だが、$x \in S^n$ より $|x| = 1$ だから $g \circ f(\pi(x)) = \pi(x)$ が成り立つ。つまり $g \circ f$ は X の恒等写像である。従って f,g は全単射であり $g = f^{-1}$ となる。f,g は連続であったから,$f : X \to \mathbb{R}P^n$ は同相写像となる。問題 15 (2) より X はコンパクト空間であった。よって問題 13 (1) より $\mathbb{R}P^n$ はコンパクト空間となる。

問題 18. X を Hausdorff 空間とし任意の $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta(X)$ を取る。$x \neq y$ だからある開集合 U, V が存在して $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$. $(x, y) \in U \times V$ であり $U \times V$ は $X \times X$ の開集合である。任意の $(a, b) \in U \times V$ に対して $a \in U$, $b \in V$, $U \cap V = \emptyset$ より $a \neq b$. つまり $(a, b) \notin \Delta(X)$ だから $U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta(X)$. 従って $(X \times X) \setminus \Delta(X)$ は $X \times X$ の開集合だから $\Delta(X)$ は $X \times X$ の閉集合である。次に $\Delta(X)$ が $X \times X$ の閉集合であると仮定する。$x, y \in X$, $x \neq y$ を任意に取る。このとき $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta(X)$ である。$(X \times X) \setminus \Delta(X)$ は $X \times X$ の開集合だから、X の開集合 U, V が存在して $(x, y) \in U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta(X)$ が成り立つ。このとき $x \in U$, $y \in V$ である。そこで $U \cap V \neq \emptyset$ と仮定して $a \in U \cap V$ とすると $(a, a) \in (U \times V) \cap \Delta(X)$ となるが、$U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta(X)$ に矛盾する。よって $U \cap V = \emptyset$ であり X が Hausdorff 空間であることが示せた。

問題 19. $F : S \times S \to X \times X$ を $F(a, b) = (f(a), f(b))$ と定義する。$X \times X$ の任意の開集合 A を取る。任意の $(a, b) \in F^{-1}(A)$ を取る。このとき $F(a, b) = (f(a), f(b)) \in A$ だから X の二つの開集合 U, V で $F(a, b) = (f(a), f(b)) \in U \times V \subset A$ となるものが存在する。

$f(a) \in U$, $f(b) \in V$ だから $a \in f^{-1}(U)$,$b \in f^{-1}(V)$ であり $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ は S の開集合である (X の商位相の定義による)。F の定義より $F^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \times f^{-1}(V)$ に注意すると $(a,b) \in f^{-1}(U) \times f^{-1}(V) = F^{-1}(U \times V) \subset F^{-1}(A)$ となる。従って $F^{-1}(A)$ は $S \times S$ の開集合である。つまり F は連続である。

$$\begin{aligned} F^{-1}(\Delta(X)) &= \{(a,b) \in S \times S \mid F(a,b) \in \Delta(X)\} \\ &= \{(a,b) \in S \times S \mid (f(a), f(b)) \in \Delta(X)\} = G \end{aligned}$$

であり仮定から $G = \{(a,b) \in S \times S \mid f(a) = f(b)\}$ は閉集合。よって $F^{-1}(\Delta(X))$ は $S \times S$ の閉集合。従って $F^{-1}((X \times X) \setminus \Delta(X)) = (S \times S) \setminus G$ は $S \times S$ の開集合である。

次に $F(F^{-1}((X \times X) \setminus \Delta(X))) = (X \times X) \setminus \Delta(X)$ を示す。任意の $(x,y) \in F(F^{-1}((X \times X) \setminus \Delta(X)))$ を取ると $(x,y) = F(a,b)$ となる $(a,b) \in F^{-1}((X \times X) \setminus \Delta(X))$ が存在するから $(x,y) \in (X \times X) \setminus \Delta(X)$ となる。逆に $(x,y) \in (X \times X) \setminus \Delta(X)$ を取る。$f : S \to X$ が全射だから $f(a) = x$, $f(b) = y$ となる $a, b \in S$ が取れる。このとき $F(a,b) = (x,y)$ となる。よって $(a,b) \in F^{-1}((X \times X) \setminus \Delta(X))$ であり $(x,y) = F(a,b) \in F(F^{-1}((X \times X) \setminus \Delta(X)))$ となる。従って $F(F^{-1}((X \times X) \setminus \Delta(X))) = (X \times X) \setminus \Delta(X)$ が分かった。

最後に $S \times S$ の任意の開集合 A に対して $F(A)$ が $X \times X$ の開集合であることを示す。これが示されれば $F^{-1}((X \times X) \setminus \Delta(X))$ が $S \times S$ の開集合だから $F(F^{-1}((X \times X) \setminus \Delta(X))) = (X \times X) \setminus \Delta(X)$ が $X \times X$ の開集合、つまり $\Delta(X)$ は $X \times X$ の開集合となる。よって $\Delta(X)$ は $X \times X$ の閉集合となり問題 18 より X が Hausdorff 空間であることが結論される。

A を $S \times S$ の開集合として $(x,y) \in F(A)$ とする。$(x,y) = F(a,b)$ となる $(a,b) \in A$ を取る。A が $S \times S$ の開集合だから S の開集合 U,V が存在して $(a,b) \in U \times V \subset A$ となる。$(x,y) \in F(U \times V) \subset F(A)$ である。ここで $F(U \times V) = f(U) \times f(V)$ を示せば問題の仮定から $f(U)$,$f(V)$ は X の開集合だから $f(U) \times f(V)$ が $X \times X$ の開集合となり $F(A)$ が $X \times X$ の開集合となることが分かる。そこで $(z,w) \in F(U \times V)$ を取る。このとき $(z,w) = (f(c), f(d))$ となる $c \in U$,$d \in V$ を取ることが出来る。よって $z \in f(U)$,$w \in f(V)$ だから $(z,w) \in f(U) \times f(V)$。逆に $(z,w) \in f(U) \times f(V)$ とする。このとき $c \in U$, $d \in V$ で $z = f(c)$, $w = f(d)$ となるものが存在する。よって $(z,w) = (f(c), f(d)) = F(c,d) \in F(U \times V)$。従って $F(U \times V) = f(U) \times f(V)$ となる。以上より X が Hausdorff 空間であることが分かった。

問題 20.

(1) $\tau : S^n \to S^n$,$\tau(x) = -x$ であったから $\tau(\tau(x)) = x$ が任意の $x \in S^n$ に対して成り立つ。特に τ は全単射であり $\tau^{-1} = \tau$ となる。τ は $\mathbb{R}^{n+1} \ni x \mapsto -x \in \mathbb{R}^{n+1}$ の S^n への制限なので連続である。従って $\tau^{-1} = \tau$ も連続であるから τ は同相写像である。

(2) $U \subset S^n$ を開集合とする。$x \in \pi^{-1}(\pi(U))$ とする。このとき $\pi(x) \in \pi(U)$ である。従って $\pi(x) = \pi(y)$ となる $y \in U$ が取れる。同値関係 $\approx$ の定義から $x = \pm y$ となる。つまり $x = y$ または $x = \tau(y)$ だから $x \in U \cup \tau(U)$。逆に $x \in U \cup \tau(U)$ とすると $x \in U$ ならば $\pi(x) \in \pi(U)$ である。また $x \in \tau(U)$ なら $x = -y = \tau(y)$ となる $y \in U$ が存在する。よって $\pi(x) = \pi(-y) = \pi(y) \in \pi(U)$ だから $x \in \pi^{-1}(\pi(U))$。つまり $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cup \tau(U)$ が成り立つ。特に $\tau(U)$ が開集合だから $\pi^{-1}(\pi(U))$ は S^n の開集合。従って商位相の定義から $\pi(U)$ は X の開集合である。

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

(3) $G = \{(a,b) \in S^n \times S^n \mid \pi(a) = \pi(b)\}$ とおく。任意の $x \in S^n$ に対して $(x,x) \in G$ だから $\Delta(S^n) \subset G$ である。また $\pi(x) = \pi(-x)$ より $(x,-x) = (x,\tau(x)) \in G$ となる。従って $\Delta(S^n) \cup \{(a,\tau(a) \mid a \in S^n)\} \subset G$ となる。一方 $(x,y) \in G$ とすると $\pi(x) = \pi(y)$ より $y = \pm x$。従って $(x,y) \in \Delta(S^n) \cup \{(a,\tau(a)) \mid a \in S^n\}$ となる。つまり $G = \Delta(S^n) \cup \{(a,\tau(a)) \mid a \in S^n\}$ である。S^n は Hausdorff 空間 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_n)$ の部分空間だから Hausdorff 空間である。よって $\Delta(S^n)$ は $S^n \times S^n$ の閉集合。また $\tau : S^n \to S^n$ は連続だからプリント Y111 問題 21 より $\{(a,\tau(a)) \mid a \in S^n\}$ は $S^n \times S^n$ の閉集合である。従って G は $S^n \times S^n$ の閉集合となる。従って問題 19 より X は Hausdorff 空間である。

(4) 一般に X が Hausdorff 空間、Y が X と同相な位相空間ならば Y は Hausdorff 空間である (以下の補足を参照)。いま $\mathbb{R}P^n$ は Hausdorff 空間 $X = S^n/{\approx}$ と同相だから射影空間 $\mathbb{R}P^n$ は Hausdorff 空間となる。

補足 4. Y が Hausdorff 空間 X と同相な位相空間とする。このとき Y は Hausdorff 空間であることを示す。そのために $f : Y \to X$ を同相写像、つまり連続な全単射で $f^{-1} : X \to Y$ が連続と仮定する。任意の $y, y' \in Y$, $y \neq y'$ を取り $x := f(y)$, $x' := f(y')$ とする。f が単射で $y \neq y'$ だから $x \neq x'$. X が Hausdorff 空間なので X の開集合 U, U' で $x \in U$, $x' \in U'$, $U \cap U' = \emptyset$ となるものが取れる。$V = f^{-1}(U)$, $V' = f^{-1}(U')$ は Y の開集合。また $y = f^{-1}(x) \in f^{-1}(U) = V$, $y' = f^{-1}(x') \in f^{-1}(U') = V'$ で $V \cap V' = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(U') = f^{-1}(U \cap U') = f(\emptyset) = \emptyset$ だから Y は Hausdorff 空間である。

問題 21. $A \subset \bigcup_{a\in A} U(a;1)$ が成り立つ。但し $\varepsilon > 0$ に対して $U(a;\varepsilon) = \{x \in S \mid d(a,x) < \varepsilon\}$ である。A がコンパクト集合で $\{U(a;1) \mid a \in A\}$ は A の開被覆だから $A \subset \bigcup_{i=1}^K U(a_i;1)$ となる有限個の $a_1, \ldots, a_K \in A$ を取ることが出来る。ここで $s = a_K$ として $r_o := \max\{d(a_1,s), \ldots, d(a_{K-1},s)\}$ とおく。このとき $d(s,a_i) \le r_o$ が任意の $i = 1, \ldots, K$ に対して成り立つことに注意。ここで $A \subset U(s; 1+r_o)$ を示す。任意の $i = 1, \ldots, K$ と任意の $x \in U(a_i;1)$ に対して $d(s,x) \le d(s,a_i) + d(a_i,x) < r_o + 1$ だから $x \in U(s; r_o+1)$ となる。つまり $A \subset \bigcup_{i=1}^K U(a_i;1) \subset U(s; r_o+1)$ となるから A は有界である。

また後半の答えは「存在する」である。実際、上の設定で $r = 1 + r_o$ とおくと $A \subset U(s;r)$. 任意の $a \in S$ を取り $t := r + d(a,s)$ とおく。このとき任意の $x \in A$ に対して $d(a,x) \le d(a,s) + d(s,x) < d(a,s) + r = t$ となるから $x \in U(a;t)$. よって $A \subset U(a;t)$.

問題 22. (ノルムの条件 (N1), (N2), (N3) についてはプリント Y102 を参照。) $f \in C(S)$ とする。任意の $x \in S$ に対して $0 \le |f(x)| \le \|f\|$ より $\|f\| \ge 0$。また $f = 0$ のときは $\|f\| = \sup_{x\in S} |f(x)| = 0$ である。更に $\|f\| = 0$ なら $f(x) = 0$ が任意の $x \in S$ に対して成り立つから $f = 0$ である。よって条件 (N1) が成り立つ。任意の $c \in \mathbb{C}, f \in C(S)$ を取る。このとき $|cf(x)| = |c||f(x)|$ $(x \in S)$ において $x \in S$ について上限を取れば $\|cf\| = |c|\|f\|$ が成り立つことが分かる。つまり条件 (N2) が成り立つ。また任意の $x \in S, f, g \in C(S)$ に対して $|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \|f\| + \|g\|$ が成り立つ。よってこの式で $x \in S$ について上限を取れば $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$ となり条件 (N3) が成り立つ。

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 23. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(S)$ が Cauchy 列であるとする。つまり $d_\infty(f_n, f_m) \to 0$ $(n, m \to \infty)$ が成り立つとする。d_∞ の定義より $\|f_n - f_m\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$. ノルム $\|\cdot\|$ の定義から任意の $x \in S$ に対して $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{y \in S} |f_n(y) - f_m(y)| = \|f_n - f_m\|$. 特に $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{C}$ の Cauchy 列である。よって収束する。$\{f_n(x)\}$ の極限を $f(x) \in \mathbb{C}$ とする。これが任意の $x \in S$ について得られるから、関数 $S \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ が得られた。

このようにして得られた関数 f が連続であり $\|f - f_n\| \to 0 (n \to \infty)$, つまり $\{f_n\}$ は f に $(C(S), d_\infty)$ で収束することを示す。任意の $\varepsilon > 0$ を取る。このときある番号 n_0 が存在して、$n, m \geq n_0$ ならば $\|f_n - f_m\| < \varepsilon/3$ が成り立つ。特に $n, m \geq n_0$ ならば任意の $x \in S$ に対して $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| < \varepsilon/3$ である。ここで $n \geq n_0$ を固定したら数列 $\{|f_n(x) - f_m(x)|\}$ は $m \to \infty$ のとき $|f_n(x) - f(x)|$ に収束する。従って上式で $m \to \infty$ とすると $n \geq n_0$ ならば $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon/3$ が任意の $x \in S$ に対して成り立つ。任意の $a \in S$ を取る。すると f_{n_0} が連続だからある $\delta > 0$ が存在して、$d(a, x) < \delta$ ならば $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \varepsilon/3$ が成り立つ。よって $d(a, x) < \delta$ のとき

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

となる。よって f は a で連続。$a \in S$ は任意だったから f は S で連続、つまり $f \in C(S)$ である。また $n \geq n_0$ ならば任意の $x \in S$ に対して $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon/3$ であった。この式で $x \in S$ について上限を取ると $\|f - f_n\| \leq \varepsilon/3$ が得られる。これは $\|f_n - f\| \to 0$ $(n \to \infty)$ を表している。従って $\{f_n\}$ は f に $(C(S), d_\infty)$ で収束する。

補足 5. 一般に距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列ならばそれは Cauchy 列である。(逆は一般には成り立たない。この逆、つまり任意の Cauchy 列が収束列となる、という性質を持つ距離空間を完備であると言った。) これを示しておく。$\{x_n\}$ が収束列であると仮定して, 極限を $x \in X$ とします。任意の $\varepsilon > 0$ を取ると、ある番号 N が存在して $n \geq N$ ならば $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ となる。従って $n, m \geq N$ ならば $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. つまり $d(x_n, x_m) \to 0$ $(n, m \to \infty)$ が成り立つ。これは $\{x_n\}$ が Cauchy 列であることを表している。

問題 24.

(1) 任意の $a \in S$ をとる。任意の $b \in S \setminus \{a\}$ に対して $\delta = d(a, b)$ とおくと $\delta > 0$ であり $U(b; \delta) \subset S \setminus \{a\}$ となる。つまり $S \setminus \{a\}$ は開集合だから $\{a\}$ は閉集合。次に $\varepsilon := \min\{d(a, b) \mid b \in S \setminus \{a\}\}$ とする。$c \in U(a; \varepsilon)$ とすると $d(a, c) < \varepsilon$. 従って任意の $b \in S$, $b \neq a$ に対して $d(a, c) < d(a, b)$ となる。もし $c \neq a$ ならばこの式で $b = c$ とすることが出来て $d(a, c) < d(a, c)$ となり矛盾する。よって $a = c$ である。いま $a \in U(a; \varepsilon)$ だから $U(a, \varepsilon) = \{a\}$ となる。従って $\{a\}$ は S の開集合である。

(2) 設問 (1) より任意の $a \in S$ に対して $\{a\}$ は S の開集合である。U を S の任意の部分集合とする。このとき $U = \bigcup_{b \in U} \{b\}$ となるから U は S の開集合である。つまり S の位相は離散位相 2^S (S の部分集合全体の族) である。そこで $f : S \to \mathbb{C}$ を任意の関数とする。$\mathbb{C}$ の開集合 V に対して $f^{-1}(V)$ は S の部分集合だから開集合、よって f は連続である。従って特に f_a $(a \in S)$ も連続である。

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

(3) 設問 (2) より $C(S)=\{f:S\to\mathbb{C}\}$ である。つまり $C(S)$ は S 上の関数全体の空間と一致することに注意する。$S=\{a_1,\dots,a_N\}$ とおく。各 a_i は互いに異なる点である。また $f_i=f_{a_i}(i=1,\dots,N)$ とする。任意の関数 $f:S\to\mathbb{C}$ と任意の $i=1,\dots,N$ に対して $f(a_i)=\sum_{j=1}^N f(a_j)f_j(a_i)$ が成り立つ。実際 $f_j(a_i)$ は $i=j$ のとき 1 でその他のとき 0 だからである。つまり任意の $f\in C(S)$ は $f_1,\dots,f_N$ の線形結合で書き表せる。また $\sum_{j=1}^N c_jf_j=0,\ c_i\in\mathbb{C}\ (i=1,\dots,N)$ とすると $0=\sum_{j=1}^N c_jf_j(a_i)=c_i$ となるから $c_i=0\ (i=1,\dots,N)$ となり $f_1,\dots,f_N$ は一次独立。よって $\{f_1,\dots,f_N\}$ は線形空間 $C(S)$ の基底となる。特に $C(S)$ は N 次元である。ここで

$$\Phi(f):={}^t(f(a_1),\dots,f(a_N))$$

で写像 $\Phi:C(S)\to\mathbb{C}^N$ を定めると、Φ が容易に線形写像であることが分かる。また $\Phi(f)=0$ とすると任意の $i=1,\dots,N$ に対して $f(a_i)=0$, つまり $f=0$ であるから Φ は単射。$C(S)$ と $\mathbb{C}^N$ は共に N 次元複素線形空間であるから $\Phi:C(S)\to\mathbb{C}^N$ は線形同型写像である。また $\Phi^{-1}:\mathbb{C}^N\to C(S)$ は $\Phi^{-1}(z)(a_i)=z_i\ (z={}^t(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^N)$ で与えられる。特に $z\in\mathbb{C}^N$ に対して $\|\Phi^{-1}(z)\|=\max\{|z_1|,\dots,|z_N|\}$ となる。従って任意の $z\in\mathbb{C}^N$ に対して Euclid ノルムを $|z|\ (=(|z_1|^2+\cdots+|z_N|^2)^{1/2})$ と書くと

$$\|\Phi^{-1}(z)\|\le|z|\le N^{1/2}\|\Phi^{-1}(z)\|.$$

特に任意の $f\in C(S)$ に対して $\|f\|\le|\Phi(f)|\le N^{1/2}\|f\|$. そこで $\{z_n\}\subset\mathbb{C}^N$, $z_n\to z\in\mathbb{C}^N$ とすると

$$\|\Phi^{-1}(z_n)-\Phi^{-1}(z)\|=\|\Phi^{-1}(z_n-z)\|\le|z_n-z|\to 0$$

が $n\to\infty$ のとき成り立つから $\Phi^{-1}:\mathbb{C}^N\to C(S)$ は連続である。さらに $\{f_n\}\subset C(S)$, $f_n\to f\in C(S)$, つまり $\|f_n-f\|\to 0\ (n\to\infty)$ とすると

$$|\Phi(f_n)-\Phi(f)|=|\Phi(f_n-f)|\le N^{1/2}\|f_n-f\|\to 0\quad(n\to\infty)$$

が成り立つから $\Phi:C(S)\to\mathbb{C}^N$ も連続である。Φ は連続な全単射でかつ Φ^{-1} も連続だから同相写像である。

(4) 設問 (3) の解答から $r>0$ に対して $\Phi(D_r(S))\subset\{z\in\mathbb{C}^N\mid|z|\le rN^{1/2}\}$. Φ は同相写像,$D_r(S)$ は $C(S)$ の閉集合だから $\Phi(D_r(S))$ は $\mathbb{C}^N$ の有界閉集合、よってコンパクト集合である。Φ^{-1} が連続だから $\Phi^{-1}(\Phi(D_r(S)))=D_r(S)$ もコンパクト集合である。

問題 25.

(1) 任意の $n\in\mathbb{N}$,$x\in S$ をとる。定義から $\rho_n(x)\ge 0$ であり $d(x,a_n)\ge 0$ である。よって $\rho_n(x)+d(x,a_n)=0$ となるのは $\rho_n(x)=d(x,a_n)=0$ の時かつその時に限るが、このとき $x=a_n$ であり $\rho_n(x)=\min\{d(a_0,x),\dots,d(a_{n-1},x)\}$ だから、$\rho_n(x)=0$ ならある $i\ (0\le i\le n-1)$ が存在して $x=a_i$ となる。従って $a_n=a_i$ となるが、$i\ne n$ であり $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ は異なる点からなる点列だから矛盾。よって $\rho_n(x)+d(x,a_n)>0$ が任意の $x\in S$ に対して成り立つから、関数 $f_n(x)=\rho_n(x)/(\rho_n(x)+d(x,a_n))$ が定義さ

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

れる。またこの式から $0 \leq f_n(x) \leq 1$ である。$f_n(x) = 1$ となるのは $d(x, a_n) = 0$, つまり $x = a_n$ の時かつその時に限る。また $f_n(x) = 0$ となるのは $\rho_n(x) = 0$ の時、つまりある i $(0 \leq i \leq n-1)$ が存在して $x = a_i$ となる時、かつその時に限るから、主張が示せた。

(2) $x, y \in S$ とすると $|d(x, a_n) - d(y, a_n)| \leq d(x, y)$ より関数 $x \mapsto d(x, a_n)$ は連続である。また $0 \leq i \leq n-1$ に対して $d(x, a_i) \leq d(x, y) + d(a_i, y)$ より $\rho_n(x) \leq d(x, y) + d(a_i, y)$ が成り立つ。これが任意の i $(i = 0, \ldots, n-1)$ に対して成り立つから $\rho_n(x) \leq d(x, y) + \rho_n(y)$. x, y は任意だから x, y を入れ替えて $\rho_n(y) \leq d(x, y) + \rho_n(x)$. これより $|\rho_n(x) - \rho_n(y)| \leq d(x, y)$ は連続である。従って $x \mapsto \rho_n(x) + d(x, a_n)$ は S 上の正の連続関数だから $x \mapsto 1/(\rho_n(x) + d(x, a_n))$ も S 上の連続関数である。$f_n(x)$ はこの連続関数と連続関数 $\rho_n(x)$ との積だから S 上連続である。後半は $0 \leq f_n(x) \leq 1$,$f_n(a_n) = 1$ より $\|f_n\| = 1$ となるから $f_n \in D_1(S)$ となる。

(3) 任意の $m, n \in \mathbb{N}$,$n > m$ を取る。任意の $x \in S$ に対して設問 (1) より $-1 \leq f_n(x) - f_m(x) \leq 1$ だから $|f_n(x) - f_m(x)| \leq 1$ となる。また $f_m(a_m) = 1$ であり、$m < n$ だから設問 (1) より $f_n(a_m) = 0$ となる。従って $|f_n(a_m) - f_m(a_m)| = 1$ となるから $\|f_n - f_m\| = 1$ となる。

次に $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束する部分列 $\{f_{n(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ を含むと仮定する。ここで $n(i)$ は $i \in \mathbb{N}$ について単調増大である。$\{f_{n(i)}\}$ は収束列だから Cauchy 列である。よってある $J \in \mathbb{N}$ が存在して $i, j \geq J$ ならば $\|f_{n(i)} - f_{n(j)}\| < 1$ が成り立つ。ところが $i > j$ ならば $n(i) > n(j)$ だから上で示したことにより $\|f_{n(i)} - f_{n(j)}\| = 1$ となり矛盾する。よって $\{f_n\}$ は収束する部分列を含まない。

(4) 任意の $r > 0$ をとり固定する。$D_r(S) = \{f \in C(S) \mid \|f\| \leq r\}$ が $(C(S), d_\infty)$ のコンパクト集合ではないことを示す。連続関数の列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $g_n(x) = r f_n(x) (x \in S)$ と定義する。設問 (2) より $\|g_n\| = r\|f_n\| = r$ だから $\{g_n\} \subset D_r(S)$ である。また設問 (3) より $n > m$ に対して $\|g_n - g_m\| = r\|f_n - f_m\| = r$ となる。従って設問 (3) と同様にして $\{g_n\}$ が収束する部分列を含まないことが分かる。よって定理 1 (1) の条件 (c) より $D_r(S)$ はコンパクト集合ではない。