担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

コンパクト集合

作成日: 12/15/2016　更新日: 01/09/2017　Version: 1.1　配布日: 12/22/2016

今回はコンパクト集合を取り扱う。まずコンパクト集合の定義に必要な開被覆について復習する。任意の正の整数 n に対し、$\mathbb{R}^n$ の Euclid 距離から定まる距離位相を $\mathcal{O}_n$ と書く。

開被覆

$(X,\mathcal{O})$ を位相空間、$A \subset X$ を部分集合とする。開集合の族 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{O}$ (Λ は添字集合) が A の ($(X,\mathcal{O})$ における) 開被覆であるとは、$A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ が成り立つ時を言う。

問題 1. 二つの実数 $a < b$ に対して $\delta := (b-a)/3$ とおく。任意の自然数 k に対し $(\mathbb{R},\mathcal{O}_1)$ の開集合 U_k を $U_k := (a+\frac{\delta}{k}, b-\frac{\delta}{k})$ と定義する。

(1) $\{U_k \mid k=1,2,\ldots\}$ は開区間 (a,b) の開被覆であることを示せ。

(2) 任意の有限個の自然数 $k_1,\ldots,k_n$ に対して $\bigcup_{i=1}^n U_{k_i} \neq (a,b)$ を示せ。

問題 2. 自然数 k に対し $(\mathbb{R}^n,\mathcal{O}_n)$ の開集合 U_k を $U_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < k\}$ と定義する。

(1) $\{U_k \mid k=1,2,\ldots\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開被覆であることを示せ。

(2) 任意の有限個の自然数 $k_1,\ldots,k_n$ に対して $\bigcup_{i=1}^n U_{k_i} \neq \mathbb{R}^n$ を示せ。

以下の問題は森田紀一著「位相空間論」(岩波書店) から引用したものである。

問題 3. $(\mathbb{R},\mathcal{O}_1)$ の閉区間 $[a,b]$ $(a<b)$ の開被覆 $\{U_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ が与えられた時、$[a,b] \subset U_{\lambda_1}\cup\cdots\cup U_{\lambda_K}$ となる有限個の Λ の元 $\lambda_1,\ldots,\lambda_K$ が存在する。これを以下に従って示せ。
(1) $M \subset [a,b]$ を次で定義する。

$$x \in M \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \in [a,b] \text{ かつ有限個の } \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \Lambda \text{ があって } [a,x] \subset U_{\lambda_1}\cup\cdots\cup U_{\lambda_n}.$$

この時 $a \in M$ かつ M は a 以外の $[a,b]$ の元を含むことを示せ。
(2) $M \subset [a,b]$ より M は有界。$x_o := \sup\{x \mid x \in M\}$ とすると $a < x_o \leq b$ を示せ。
(3) $x_o \in M$ を示せ。
(4) $x_o = b$ を示せ。また有限個の $\lambda_1,\ldots,\lambda_K \in \Lambda$ が存在して $[a,b] \subset U_{\lambda_1}\cup\cdots\cup U_{\lambda_K}$ となることを示せ。

コンパクト集合

「コンパクト集合」とは、問題 3 で扱った $(\mathbb{R},\mathcal{O}_1)$ の閉区間 $[a,b]$ の持つ性質を一般化、抽象化したものである。$(X,\mathcal{O})$ を位相空間とし $A \subset X$ とする。A が $(X,\mathcal{O})$ のコンパクト集合であるとは、A の任意の開被覆 $\{U_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\} \subset \mathcal{O}$ に対してある有限個の Λ の元 $\lambda_1,\ldots,\lambda_K$ が存在して、$\{U_{\lambda_1},\ldots,U_{\lambda_K}\}$ が A の開被覆となる場合を言う。

また位相空間 $(X,\mathcal{O})$ がコンパクト空間であるとは、X 自身が $(X,\mathcal{O})$ のコンパクト集合である場合を言う。

問題 3 により $[a,b]$ は $(\mathbb{R},\mathcal{O}_1)$ のコンパクト集合である。また問題 1, 2 より (a,b) は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合ではなく、従って $(\mathbb{R}^n,\mathcal{O}_n)$ はコンパクト空間ではない。

担当教員: 柳田 伸太郎 研究室: A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

プリント Y111 の問題 4 にあるように、位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分集合 A に対し

$$\mathcal{O}_A := \{U \mid U \subset A,\ U = A \cap O \text{ となる開集合 } O \in \mathcal{O} \text{ が存在する}\}$$

は A の位相であった。この位相を A の $(X, \mathcal{O})$ における相対位相と言う。また $(A, \mathcal{O}_A)$ を $(X, \mathcal{O})$ の部分空間と呼ぶ。

問題 4. (1) 有限集合は任意の位相についてコンパクト空間となることを示せ。
(2) X を空でない集合とし、その離散位相を 2^X と書く。この時 $(X, 2^X)$ がコンパクト空間であるためには X が有限集合であることが必要十分であることを示せ。

問題 5. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし $A \subset X$ とする。A の $(X, \mathcal{O})$ における相対位相を $\mathcal{O}_A$ とする。この時 A が $(X, \mathcal{O})$ のコンパクト集合であることと $(A, \mathcal{O}_A)$ がコンパクト空間であることが同値であることを示せ。

問題 6. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし $A \subset B \subset X$ とする。B の $(X, \mathcal{O})$ における相対位相を $\mathcal{O}_B$ とする。この時、A が $(X, \mathcal{O})$ におけるコンパクト集合であることと A が $(B, \mathcal{O}_B)$ におけるコンパクト集合であることが同値であることを示せ。

次にコンパクト集合について知られている基本的な定理を列挙する。

定理 1.

(1) (X, d) を距離空間とし距離 d から定まる距離位相を $\mathcal{O}_d$ とすると、次の三条件は同値。
  (a) $(X, \mathcal{O}_d)$ はコンパクト空間である。
  (b) X の任意の無限部分集合は集積点を持つ。
  (c) X の任意の点列は収束する部分列を持つ。

(2) Euclid 空間 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_n)$ の部分集合 A がコンパクト集合であるためには (Euclid 距離に関して) A が有界閉集合となることが必要十分。

(3) コンパクト空間 $(X, \mathcal{O})$ の任意の閉集合は $(X, \mathcal{O})$ のコンパクト集合。

(4) Hausdorff 空間 $(X, \mathcal{O})$ のコンパクト集合 A は閉集合。

(5) $(X, \mathcal{O}(X))$ をコンパクト空間、$(Y, \mathcal{O}(Y))$ を位相空間とする。このとき任意の連続写像 $f : X \to Y$ に対し $f(X)$ は $(Y, \mathcal{O}(Y))$ のコンパクト集合。

(6) $(X, \mathcal{O})$ をコンパクト空間、f を X 上の実数値連続関数、つまり $f : (X, \mathcal{O}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_1)$ を連続写像とする。この時 $x_1, x_2 \in X$ が存在して任意の $x \in X$ に対して $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ が成り立つ (最大値・最小値の存在)。

(7) コンパクト空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ から Hausdorff 空間 $(Y, \mathcal{O}(Y))$ への任意の連続写像 $f : X \to Y$ と $(X, \mathcal{O}(X))$ の任意の閉集合 A に対し、$f(A)$ は $(Y, \mathcal{O}(Y))$ の閉集合。

(8) コンパクト空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ から Hausdorff 空間 $(Y, \mathcal{O}(Y))$ への連続な全単射 $f : (X, \mathcal{O}(X)) \to (Y, \mathcal{O}(Y))$ は同相写像。

(9) 位相空間 $(X_k, \mathcal{O}_k)$ $(k = 1, \dots, K)$ が与えられているとし、$\mathcal{O}$ を直積集合 $X_1 \times \cdots \times X_K$ の積位相とする。任意の $k = 1, \dots, K$ に対して $(X_k, \mathcal{O}_k)$ がコンパクト空間ならば、$(X_1 \times \cdots \times X_K, \mathcal{O})$ もコンパクト空間である。

問題 7. 以下の $\mathbb{R}^2$ の部分集合がコンパクト集合かどうか判定せよ。
(1) $A := \{{}^t(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 + 3xy = 2\}$.
(2) $f : [0, 1] \to [0, 1]$ を Euclid 位相に関する連続関数として $B := \{{}^t(x, f(x)) \mid x \in [0, 1]\}$.
(3) $C := (0, 1] \times [0, 1]$.
(4) $n \in \mathbb{N}$ に対して $D_n := \{{}^t(1/n, y) \mid 0 \le y \le 1\}$ として $D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.

問題 8. 定理 1 (3) を示すために、$(X, \mathcal{O})$ をコンパクト空間、$A \subset X$ を閉集合、$\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{O}$ を A の開被覆とする。
(1) 開集合の族 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に $A^c = X \setminus A$ を付け加えた開集合の族 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \cup \{A^c\}$ は X の開被覆であること、つまり $X = A^c \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ が成り立つことを示せ。
(2) 設問 (1) を用いて定理 1 (3) を証明せよ。

問題 9. 定理 1 (4) を示すために、$(X, \mathcal{O})$ を Hausdorff 空間、$A \subset X$ を $(X, \mathcal{O})$ のコンパクト集合とする。

(1) $x \in A^c$ を取る。任意の $a \in A$ に対して $x \neq a$ であり X が Hausdorff 空間だから、$U_a(x), V_a(x) \in \mathcal{O}$ が存在して $a \in U_a(x)$, $x \in V_a(x)$, $U_a(x) \cap V_a(x) = \emptyset$ となる。このとき有限個の $a_1, \dots, a_K \in A$ が存在して $A \subset \bigcup_{i=1}^{K} U_{a_i}(x)$ となることを示せ。

(2) 任意の $x \in A^c$ に対して設問 (1) で得られた $a_1, \dots, a_K \in A$ と、x を含む開集合 $V_{a_1}(x), \dots, V_{a_K}(x)$ を用いて $V_x := \bigcap_{i=1}^{K} V_{a_i}(x)$ とおく。この時 $x \in V_x \subset A^c$ を示せ。またこれから A が閉集合であることを結論せよ。

問題 10. 定理 1 (6) を定理 1 (2),(5) を用いて証明したい。そこで $(X, \mathcal{O})$ をコンパクト空間、$f : X \to \mathbb{R}$ を連続関数とする。
(1) $f(X) \subset \mathbb{R}$ は有界閉集合であることを確認せよ。
(2) 設問 (1) より $a := \inf\{f(x) \mid x \in X\}$, $b := \sup\{f(x) \mid x \in X\}$ とおくと $-\infty < a \le b < +\infty$ となる。このとき $a, b \in f(X)$ を示せ。
(3) 設問 (2) より $a = f(x_1)$, $b = f(x_2)$ を満たす $x_1, x_2 \in X$ が取れる。この x_1, x_2 が定理 1 (6) の主張を満たすことを示せ。

問題 11. (1) 定理 1 (3), (4), (5) を用いて定理 1 (7) を示せ。
(2) 定理 1 (7) を用いて定理 1 (8) を示せ。

問題 12. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とし S^1 を $(\mathbb{C} = \mathbb{R}^2, \mathcal{O}_2)$ の部分空間と考える。また $x, y \in [0, 1]$ に対して同値関係「$x \sim y \iff x = y$ または $x, y \in \{0, 1\}$」を定め、商集合 $Y = [0, 1]/{\sim}$ に射影 $p : [0, 1] \to Y$ から定まる商位相を入れる。但し $[0, 1]$ には $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_1)$ の

相対位相を定めておく。この時写像 $f : Y \to S^1$, $f([x]) = e^{2\pi i x}$ は well-defined であり、更に $f : Y \to S^1$ は同相写像であることを示せ。

問題 13. (1) X をコンパクト空間とし Y を X と同相な位相空間とする。このとき Y はコンパクト空間であることを示せ。
(2) $[0,1)$ と $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ は同相かどうか答えよ。ただし $[0,1)$ には $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_1)$ の相対位相を入れる。

射影空間

プリント Y105 問題 2 (5) にあるように、$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上の二項関係 $\sim$ を「$u \sim v \iff$ ある $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ が存在して $v = cu$」と定義すると、$\sim$ は同値関係になる。$\mathbb{RP}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\!\sim$ とおく。この商集合 $\mathbb{RP}^n$ に、射影 $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ と $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{O}_{n+1})$ における相対位相から定まる商位相を入れ、$\mathbb{RP}^n$ を位相空間と考える。こうして定まる位相空間 $\mathbb{RP}^n$ を (n 次元実) 射影空間と呼ぶ。その基本的な性質は：

> n 次元実射影空間 $\mathbb{RP}^n$ はコンパクトな Hausdorff 空間である。

上記の事実の証明の前に、まず実射影空間 $\mathbb{RP}^n$ がどのような集合か考えてみよう。

問題 14. $\mathcal{L}$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の原点を通る直線全体の集合とする。$[x] \in \mathbb{RP}^n$ ($[x]$ は $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の同値類) に対して $\ell(x) = \{tx \mid t \in \mathbb{R}\}$ を対応させる対応 $\ell : [x] \mapsto \ell(x)$ は写像 $\ell : \mathbb{RP}^n \to \mathcal{L}$ として well-defined であることを示せ。また $\ell : \mathbb{RP}^n \to \mathcal{L}$ は全単射であることを示せ。

$\mathbb{RP}^n$ がコンパクト空間であることを示すために次のような位相空間 X を考える。$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の原点を中心とする単位球面とする。S^n には $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{O}_{n+1})$ から定まる相対位相を入れ、これを位相空間と考える。そして $x, y \in S^n$ に対して二項関係 $\approx$ を「$x \approx y \iff y = x$ または $y = -x$」と定義する。

問題 15. (1) $\approx$ は S^n の同値関係であることを示せ.
(2) $X := S^n/\!\approx$ に射影 $\pi : S^n \to X$ から定まる商位相を入れて X を位相空間と考える. このとき X はコンパクト空間であることを示せ.

写像 $\iota : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ を $\iota(x) := x$ で定める (このような写像を包含写像と呼ぶ)。また写像 $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ を $\psi(x) := x/|x|$ $(x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ で定める。

問題 16. 写像 $F : S^n \to \mathbb{RP}^n$ を $F(x) := p \circ \iota(x) = p(x)$ $(x \in S^n)$ と定義する。
(1) ある写像 $f : X = S^n/\!\approx \to \mathbb{RP}^n$ が存在して $F(x) = f \circ \pi(x)$ が成り立つことを示せ。
(2) 設問 (1) で得られた写像 $f : X \to \mathbb{RP}^n$ は連続であることを示せ。

問題 17. 写像 $G : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to X$ を $G(x) := \pi \circ \psi(x) = \pi(x/|x|)$ で定める。
(1) ある写像 $g : \mathbb{RP}^n \to X = S^n/\!\approx$ が存在して $G(x) = g \circ p(x)$ が成り立つことを示せ (下の図式を参照のこと)。

(2) 設問 (1) で得られた写像 $g : \mathbb{RP}^n \to X$ は連続であることを示せ。
(3) 前問で得られた連続写像 $f : X \to \mathbb{RP}^n$ は同相写像であることを示せ。またこれから $\mathbb{RP}^n$ がコンパクト空間であることを示せ。

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, shift left, "\iota"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[l, shift left, "\psi"] \arrow[d, "p"] \\ X = S^n/\approx \arrow[r, shift left, "f"] & \mathbb{RP}^n \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

$\mathbb{RP}^n$ が Hausdorff 空間であることを示すために次の問題の主張を用いる。

問題 18. 次を示せ：位相空間 X が Hausdorff 空間であることと、直積空間 $X \times X$ の対角線集合 $\Delta(X) := \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ が $X \times X$ の閉集合であることは同値。

問題 19. S を位相空間、X を集合とし $f : S \to X$ を全射とする。X には f から定まる商位相を入れておく。S の任意の開集合 $U \subset S$ に対して $f(U) \subset X$ が X の開集合であったと仮定する。更に $S \times S$ の部分集合 $G := \{(a, b) \in S \times S \mid f(a) = f(b)\}$ が $S \times S$ の閉集合であると仮定する。このとき X は Hausdorff 空間であることを示せ。

問題 20. 実射影空間 $\mathbb{RP}^{n+1}$ が Hausdorff 空間であることを以下の手順で示せ。
(1) $\tau(x) := -x$ で定まる写像 $\tau : S^n \to S^n$ は同相写像であることを示せ。
(2) 射影 $\pi : S^n \to X = S^n/\approx$ について、S^n の任意の開集合 $U \subset S^n$ に対して $\pi(U)$ は X の開集合であることを示せ。
(3) 集合 $G := \{(a, b) \in S^n \times S^n \mid \pi(a) = \pi(b)\}$ は $S^n \times S^n$ の閉集合であることを示せ。(ヒント: $G = \Delta(S^n) \cup \{(a, \tau(a)\,;\, a \in S^n)\}$ となることを示し、また上の問題とプリント Y111 問題 21 を用いると良い。)
(4) $\mathbb{RP}^{n+1}$ が Hausdorff 空間であることを示せ。

コンパクト集合と有界閉集合

距離空間 (S, d) のコンパクト集合 A は有界である。また定理 1 (4) とプリント Y111 問題 20 により A は閉集合である。つまり (S, d) のコンパクト集合は有界閉集合である。ではこの逆は成り立つだろうか？定理 1 (2) より Euclid 空間 $(\mathbb{R}^n, d_n)$ については逆も成り立つが、一般には逆は成り立たない。これを示す前に上述の事実を示しておこう。

問題 21. (S, d) を距離空間、A を (S, d) のコンパクト集合とする。このとき A は有界集合であること、つまりある点 $s \in S$ とある正の数 r が存在して $A \subset U(s; r)$ となることを示せ。また任意の $a \in S$ に対して $A \subset U(a; t)$ となる $t > 0$ は存在するか答えよ。

以下では (S, d) を空でないコンパクト距離空間とする。定理 1 (6) より任意の複素数値連続関数 $f : S \to \mathbb{C}$ は最大値と最小値を持つ。特に

$$\|f\| := \sup_{x \in S} |f(x)|$$

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

は有限の値 (非負実数) となる。また $C(S) := \{f : S \to \mathbb{C} \mid f$ は連続$\}$ とおく。$C(S)$ は $\mathbb{C}$ 上の線形空間である。

問題 22. $\|\cdot\|$ は線形空間 $C(S)$ 上のノルムであることを示せ。

従って $C(S)$ には距離 $d_\infty(f,g) := \|f-g\|$ が定義される。この距離空間 $(C(S), d_\infty)$ に対して S が無限集合 (例えば $S=[0,1]$ など) の場合、有界閉集合は必ずしもコンパクト集合にはならない。実際、次の事実が成り立つ。以下の問題はこの事実を示すためにある。

> 距離空間 $(C(S), d_\infty)$ において、原点中心の半径 $r>0$ の球 $D_r(S) := \{f \in C(S) \mid \|f\| \le r\}$ がコンパクトであるためには S が有限集合であることが必要十分。

問題 23. 距離空間 $(C(S), d_\infty)$ は完備であること、つまり任意の Cauchy 列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C(S)$ は $(C(S), d_\infty)$ においてある関数 $f \in C(S)$ に収束することを示せ。

問題 24. S は N 個の元からなる有限集合で d がその上の距離であるとする。
(1) 任意の $a \in S$ に対して一点からなる集合 $\{a\}$ は S の閉集合かつ開集合であることを示せ。
(2) 任意の $a \in S$ に対して関数 $f_a : S \to \mathbb{C}$ を

$$f_a(a) = 1, \quad f_a(b) = 0 \ \ (b \in S,\ a \neq b)$$

と定める。このとき $f_a : S \to \mathbb{C}$ は連続であることを示せ。
(3) S の元に番号をつけ $S = \{a_1, \ldots, a_N\}$ と並べる。このとき写像 $\Phi : C(S) \to \mathbb{C}^N$, $\Phi(f) := {}^t(f(a_1), \ldots, f(a_N))$ は線形同型写像でありかつ同相写像であることを示せ。
(4) 任意の $r>0$ に対して $D_r(S)$ は $(C(S), d_\infty)$ のコンパクト集合であることを示せ。

次に S が無限集合だとする。この時 S の異なる点からなる無限点列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty \subset S$ をとる。そして任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して S 上の関数 f_n を次で定義する。

$$f_n(x) := \frac{\rho_n(x)}{\rho_n(x) + d(x, a_n)}, \quad \rho_n(x) := \min\{d(a_0, x), \ldots, d(a_{n-1}, x)\}.$$

問題 25. (プリント Y103 問題 18 参照) 上の状況で以下の設問に答えよ。

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $x \in S$ に対して $0 \le f_n(x) \le 1$ を示せ。また $f_n(x) = 0$ となるのは $x \in \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ の時、かつその時に限ることを示せ。さらに $f_n(x) = 1$ となるのは $x = a_n$ の時、かつその時に限ることを示せ。

(2) 上で定義した関数 $f_n : S \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ は連続であることを示せ。また $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset D_1(S)$ を示せ。

(3) 任意の $n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$ に対して $\|f_n - f_m\| = 1$ を示せ。またこれから $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は $(C(S), d_\infty)$ で収束する部分列を含まないことを示せ。

(4) 任意の $r > 0$ に対して $D_r(S)$ は $(C(S), d_\infty)$ のコンパクト集合ではないことを示せ。

つまり S が無限集合の時 $D_r(S)$ はコンパクトではないことが分かった。つまり (ある $r>0$ について)$D_r(S)$ がコンパクトなら S は有限集合となり、上記の事実が証明できた。