担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

解答 (位相空間と連続写像)

作成日: 12/17/2016　Version: 0.1

問題 0. $\varepsilon > 0$, $a \in X$, $b \in Y$ に対して $U_X(a;\varepsilon) := \{x \in X \mid d_X(a,x) < \varepsilon\}$, $U_Y(b;\varepsilon) := \{y \in Y \mid d_Y(b,y) < \varepsilon\}$ と書く。

(1) $\Longrightarrow$ (2) $a \in X$ として $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ を a に収束する点列とする。任意の $\varepsilon > 0$ を取る。(1) より $x \in X$, $d_X(x,a) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ となる $\delta > 0$ が取れる。$\lim_{n\to\infty} d_X(x_n,a) = 0$ より $n \geq N$ ならば $d_X(x_n,a) < \delta$ となる番号 N が取れる。よって $n \geq N$ ならば $d_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$ となる。これは点列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ が $f(a) \in Y$ に収束することを表している。よって (2) が成り立つ。

(2) $\Longrightarrow$ (3) 対偶を示す。(3) が成り立たないとすると Y のある開集合 V で $f^{-1}(V)$ が X の開集合でないものが存在する。このときある点 $a \in f^{-1}(V)$ が存在して、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $U_X(a;\varepsilon) \not\subset f^{-1}(V)$ となる。特に $\varepsilon = 1/n (n = 1,2,\ldots)$ として $x_n \in U_X(\varepsilon; 1/n)$ かつ $x_n \notin f^{-1}(V)$ となるものが存在する。$d_X(x_n,a) < 1/n$ だから点列 $\{x_n\} \subset X$ は点 a に収束する。また $f(a) \in V$ で V が Y の開集合だから、ある $\delta > 0$ が存在して $U_Y(f(a);\delta) \subset V$ となる。x_n の取り方から $f(x_n) \notin V$, 特に $f(x_n) \notin U_Y(f(a);\delta)$ である。よって $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ は $f(a) \in Y$ に収束しない。つまり (2) は成り立たない。

(3)$\Longrightarrow$ (1) 任意の $a \in X, \varepsilon > 0$ を取る。(3) より $f^{-1}(U_Y(f(a);\varepsilon))$ は X の開集合である。$a \in f^{-1}(U_Y(f(a);\varepsilon))$ だから、ある $\delta > 0$ が存在して $U_X(a;\delta) \subset f^{-1}(U_Y(f(a);\varepsilon))$. よって $x \in X$ が $d_X(x,a) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ が成り立つ。つまり (1) が成り立つ。

問題 1. (プリント Y102, 問題 12 参照) 任意の $a \in X$ に対して $\varepsilon > 0$ なら $U(a;\varepsilon) \subset X$ だから $X \in \mathcal{O}_d$. また $a \notin \emptyset$ だから $\emptyset \in \mathcal{O}_d$ であり条件 (O_1) が成り立つ。$U, V \in \mathcal{O}_d$ として $a \in U \cap V$ を取る。U, V が開集合だから、ある正の数 δ_1, δ_2 が存在して $U(a;\delta_1) \subset U$, $U(a;\delta_2) \subset V$ となる。$\delta := \min\{\delta_1,\delta_2\}$ とすると $U(a;\delta) \subset U \cap V$ だから $U \cap V \in \mathcal{O}_d$ となり条件 (O_2) が成り立つ。集合 Λ の任意の元 λ に対して $U_\lambda \in \mathcal{O}_d$ が与えられているとする。$a \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ とする。$a \in U_\mu$ となる $\mu \in \Lambda$ が存在する。$U_\mu \in \mathcal{O}_d$ より、ある $\delta > 0$ が存在して $U(a;\delta) \subset U_\mu \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ となるから $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}_d$ となり条件 (O_3) が成り立つ。従って $\mathcal{O}_d$ は X の位相である。

問題 2. 任意の $a \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$ に対して $U(a;\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a,x) < \varepsilon\}$, $U_1(a;\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_1(a,x) < \varepsilon\}$ とおく。関数 $f(t) := \frac{t}{1+t} (t \geq 0)$ と $s,t \geq 0$ について $s < t \iff f(s) < f(t)$ が成り立つ (これは $f(t) - f(s) = \frac{(t-s)}{(1+t)(1+s)}$ から従う)。また $d_1(x,y) = f(d(x,y)) (x,y \in \mathbb{R}^n)$ だから、任意の $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ に対して

$$x \in U(a;\varepsilon) \iff d(x,a) < \varepsilon \iff d_1(x,a) = f(d(x,a)) < f(\varepsilon) \iff x \in U_1(a; f(\varepsilon)).$$

従って $U(a;\varepsilon) = U_1(a; f(\varepsilon))$. $U \in \mathcal{O}_d$, $a \in U$ とする。ある $\delta > 0$ が存在して $U(a;\delta) \subset U$ となる。よって $U_1(a; f(\delta)) \subset U$ だから $U \in \mathcal{O}_{d_1}$. 逆に $U \in \mathcal{O}_{d_1}$ とするとある $0 < \delta < 1$ が存在して $U_1(a;\delta) \subset U$. $\delta/(1-\delta) > 0$, $f(\delta/(1-\delta)) = \delta$ より $U_1(a;\delta) = U(a;\delta/(1-\delta)) \subset U$. よって $U \in \mathcal{O}_d$. 以上より $\mathcal{O}_{d_1} = \mathcal{O}_d$.

問題 3. 答えは 29 個である。一般に有限集合 Y に対してその元の個数を $|Y|$ と書く。$A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$ とすると $X = \{a,b,c\}$ の部分集合全体の族 2^X は $2^X =$

$\{\emptyset, A, B, C, A\cup B, B\cup C, C\cup A, X\}$ となる。$\mathcal{O} \subset 2^X$ を $X = \{a,b,c\}$ の位相とし、$n := |\mathcal{O} \cap \{A,B,C\}|$ とする。

$n=0$ の時。一つ目は $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$. $\mathcal{O} \neq \{\emptyset, X\}$ の時は $F \in \mathcal{O}$ を $F \neq \emptyset, X$ とすると $|F| = 2$ である。このようなものが二つ以上あったとして $F, G \in \mathcal{O}$, $F \neq G$, $|F| = |G| = 2$ と仮定する。この時 $F \cap G \neq \emptyset$ であり $F \neq G$ より $F \cap G \in \{A,B,C\}$ となるから矛盾。よって $\mathcal{O}$ の元で二個の元からなる部分集合は存在しても高々一つ。この一つは自由に選べるから合計で $1+3=4$ 通りある。

$n=1$ の時。このとき A,B,C から一つ選ぶ選び方が 3 通りある。$\mathcal{O}\cap\{A,B,C\} = \{A\}$ と仮定する。$|\mathcal{O}\setminus\{\emptyset,A,X\}| = 0$ なら $\mathcal{O} = \{\emptyset, A, X\}$ となる (一通り)。また $|\mathcal{O}\setminus\{\emptyset,A,X\}| = 1$ のときは X の二つの元からなる部分集合を自由に選んでよいから 3 通りある。さらに $|\mathcal{O}\setminus\{\emptyset,A,X\}| = 2$ の時、$\mathcal{O}\setminus\{\emptyset,A,X\} = \{F,G\}$ とすると $F\cap G = A$ となる必要があるため、$F = A\cup B$ かつ $G = C\cup A$, つまり $\mathcal{O}\setminus\{\emptyset,A,X\} = \{A\cup B, C\cup A\}$ と定まる。合計で $3\times(1+3+1) = 15$ 通りある。

$n=2$ の時。この時は A,B,C から二つ選ぶ選び方が 3 通りある。$\mathcal{O}\cap\{A,B,C\} = \{A,B\}$ とする。この時 $A\cup B \in \mathcal{O}$ となる必要がある。$|\mathcal{O}\cap\{A\cup B, B\cup C, C\cup A\}| = 1$ の時はこれだけだから 1 通り。$|\mathcal{O}\cap\{A\cup B, B\cup C, C\cup A\}| = 2$ の時は $A\cup B$ の他に $B\cup C$ または $C\cup A$ が入りうるから 2 通り。$|\mathcal{O}\cap\{A\cup B, B\cup C, C\cup A\}| = 3$ の時は $(B\cup C)\cap(C\cup A) = C \notin \mathcal{O}$ となるため存在しない。以上より $3\times 3 = 9$ 通りある。

$n=3$ の時。この時 $A,B,C\in\mathcal{O}$ より $A\cup B, B\cup C, C\cup A \in \mathcal{O}$ となり $\mathcal{O} = 2^X$ で 1 通り。

以上により $X = \{a,b,c\}$ には 29 通りの位相が入ることが分かった。

問題 4. $\emptyset = A\cap\emptyset$, $A = A\cap X$ であり $\emptyset, X \in \mathcal{O}$ だから $\emptyset, A \in \mathcal{O}_A$ となり条件 (O_1) が成り立つ。$U, V \in \mathcal{O}_A$ とすると $U = A\cap W$, $V = A\cap O$ となる $W, O \in \mathcal{O}$ が存在する。よって $U\cap V = (A\cap W)\cap(A\cap O) = A\cap(W\cap O)$ であり $W\cap O \in \mathcal{O}$ だから $U\cap V \in \mathcal{O}_A$ となり条件 (O_2) が成り立つ。集合 Λ の任意の元 λ に対して $U_\lambda \in \mathcal{O}_A$ が与えられているとする。任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して $U_\lambda = A\cap O_\lambda$ となる $O_\lambda \in \mathcal{O}$ を取ると $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A\cap O_\lambda = A\cap\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ であり $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$ だから $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}_A$ となり条件 (O_3) が成り立つ。よって $\mathcal{O}_A$ は A の位相である。

問題 5. (1) 任意の $a\in\mathbb{R}$ と任意の $b > a$ $(b\in\mathbb{R})$ に対して $[a,b)\subset\mathbb{R}$, $a\notin\emptyset$ だから $\mathbb{R}, \emptyset \in \mathcal{O}_S$ となり条件 (O_1) が成り立つ。$U, V \in \mathcal{O}_S$, $a \in U\cap V$ とする。$b_1, b_2 > a$ が存在して $[a,b_1)\subset U$, $[a,b_2)\subset V$ が成り立つ。$b := \min\{b_1,b_2\}$ とすると $a < b$ であって $[a,b)\subset U\cap V$ となるから $U\cap V\in\mathcal{O}_S$ であり条件 (O_2) が成り立つ。集合 Λ の任意の元 λ に対して $U_\lambda \in \mathcal{O}_S$ が与えられているとする。$a \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ とする。ある $\mu\in\Lambda$ が存在して $a\in U_\mu$ となる。よってある $b > a$ が存在して $[a,b)\subset U_\mu \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. 従って $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}_S$ であり条件 (O_3) が成り立つ。従って $\mathcal{O}_S$ は $\mathbb{R}$ の位相である。

(2) 任意の $U\in\mathcal{O}_d$ を取る。$a\in U$ とする。距離位相の定義から、ある $\delta > 0$ が存在して $|x-a| < \delta$ となる任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $x\in U$ となる。この時 $[a, a+\delta)\subset U$ だから $U\in\mathcal{O}_S$ であり $\mathcal{O}_d \subset \mathcal{O}_S$ となる。また $a < c$ に対して $[a,c)\notin\mathcal{O}_d$ だが $[a,c)\in\mathcal{O}_S$ である。実際 $a\in[a,c)$ だが、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $a-\varepsilon/2 \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ かつ $a-\varepsilon/2 \notin [a,c)$ より $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\not\subset[a,c)$ だから $[a,c)\notin\mathcal{O}_d$. また任意の $b\in[a,c)$ に対して $[b,c)\subset[a,c)$ より $[a,c)\in\mathcal{O}_S$. 従って $\mathcal{O}_d \neq \mathcal{O}_S$ である。

担当教員: 柳田 伸太郎 研究室: A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 6. $A^o = A$, $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le r\}$, $\partial A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = r\}$, $B^o = \emptyset$, $\overline{B} = \partial B = \{x = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0,\ x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \le r^2\}$ となることを以下で示す。

まず一般の位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分集合 $Y \subset X$ に対して, $Y^o \subset Y \subset \overline{Y}$, $\overline{Y} = Y^o \cup \partial Y$, $Y^o \cap \partial Y = \emptyset$ が成り立つことに注意する (以下の補足で示す)。

A について。任意の $a \in A$ を取ると $r - |a| > 0$. $b \in U(a; r - |a|)$ とすると $|b| = |b - a + a| \le |b - a| + |a| < r$ だから $U(a; r - |a|) \subset A$. よって A の任意の点は A の内点だから $A^o \supset A$. 従って $A^o = A$. また $a \in \mathbb{R}^n$, $|a| > r$ とすると $|a| - r > 0$. 任意の $b \in U(a; |a| - r)$ に対して

$$|b| = |a + b - a| \ge |a| - |b - a| > |a| + r - |a| = r$$

だから $b \in \mathbb{R}^n \setminus A$. よって $U(a; |a| - r) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ であり、a は $\mathbb{R}^n \setminus A$ の内点である。従って $|a| > r$ なら $a \notin \partial A$. よって $a \in \partial A$ ならば $|a| \le r$. また $|a| < r$ ならば $a \in A^o$ だったから $a \notin \partial A$. よって $a \in \partial A$ ならば $|a| \ge r$. 即ち $\partial A \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = r\}$. 一方 $a \in \mathbb{R}^n$, $|a| = r$ とし任意の $0 < \varepsilon < r$ を取る。この時 $|(1 - \varepsilon/(2r))a| = |r - \varepsilon/2| = r - \varepsilon/2 < r$, $|(1-\varepsilon/(2r))a - a| = \varepsilon/2$ より $(1-\varepsilon/(2r))a \in U(a; \varepsilon) \cap A$ であり、$|(1+\varepsilon/(2r))a| = r + \varepsilon/2 > r$, $|(1 + \varepsilon/(2r))a - a| = \varepsilon/2$ より $(1 + \varepsilon/(2r))a \in U(a; \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$. 従って $a \in \partial A$ である。以上より $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = r\}$. 更に $\overline{A} = A^o \cup \partial A$ より $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le r\}$.

B について。任意の $a \in \mathbb{R}^n$ を $a = {}^t(a', a_n)$, $a' = {}^t(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ と書き表すことにする。$B = \{{}^t(x', 0) \in \mathbb{R}^n \mid |x'| < r\}$ である。任意の $a = {}^t(a', 0) \in B$, $\varepsilon > 0$ を取る。$(a', \varepsilon/2) \in U(a; \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B) \neq \emptyset$, $a \in U(a; \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ だから $B \subset \partial B$ である。特に $B^o = \emptyset$. また $\overline{B} = B^o \cup \partial B = \partial B$ となるので $\overline{B}$ だけ考えれば良い。$a = {}^t(a', a_n) \in \mathbb{R}^n$, $a_n \neq 0$ の時 $0 < \varepsilon < |a_n|$ となる任意の $\varepsilon > 0$ に対して $b = {}^t(b', b_n) \in U(a; \varepsilon)$ とすると $|b_n - a_n| \le |b - a| < \varepsilon$ であり

$$|b_n| = |a_n + b_n - a_n| \ge |a_n| - |b_n - a_n| > |a_n| - \varepsilon > 0.$$

よって $b \in \mathbb{R}^n \setminus B$. つまり $U(a; \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus B$ だから $a \notin \overline{B}$ となる。従って $\overline{B} \subset \{{}^t(x', 0) \in \mathbb{R}^n \mid x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$. 次に $a = {}^t(a', 0)$, $|a'| > r$ とする。$|a'| - r > 0$ に注意。$b \in U(a; |a'| - r)$ ならば $|b' - a'| \le |b - a| < |a'| - r$ より

$$|b'| = |a' + b' - a'| \ge |a'| - |b' - a'| > r.$$

よって $b \in \mathbb{R}^n \setminus B$ だから $U(a; |a'| - r) \subset \mathbb{R}^n \setminus B$. よって $a \notin \overline{B}$. つまり $\overline{B} \subset \{{}^t(x', 0) \in \mathbb{R}^n \mid |x'| \le r\}$. 次に $a = {}^t(a', 0) \in \mathbb{R}^n$, $a' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|a'| = r$ とする。この時任意の $0 < \varepsilon < r$ に対して $b' := (1 - \varepsilon/(2r))a' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $b := {}^t(b', 0) \in \mathbb{R}^n$ おくと $|b'| = r - \varepsilon/2 < r$, $|b - a| = |b' - a'| = \varepsilon/2 < \varepsilon$ より $b \in U(a; \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ となる。従って $a \in \overline{B}$ となるから $\overline{B} = \{{}^t(x', 0) \in \mathbb{R}^n \mid x' \in \mathbb{R}^{n-1}, |x'| \le r\}$ が成り立つ。

補足 1. 任意の位相空間 $(X, \mathcal{O})$ と部分集合 $Y \subset X$ に対して $Y^o \subset Y \subset \overline{Y}$, $\overline{Y} = Y^o \cup \partial Y$, $Y^o \cap \partial Y = \emptyset$ を示しておく。内点の定義から $a \in Y^o$ なら $a \in U$, $U \subset Y$ となる開集合 U が存在するから $a \in Y$. よって $Y^o \subset Y$. 次に $a \in Y$ なら a を含む任意の開集合 U に対して $a \in U \cap Y \neq \emptyset$ だから $a \in \overline{Y}$. よって $Y \subset \overline{Y}$. また ∂Y の点は定義から Y の触点なので $\partial Y \subset \overline{Y}$. 従って $Y^o \cup \partial Y \subset \overline{Y}$. $a \notin Y^o$ ならば a を含む任意の開集合 U に対して

$U \not\subset Y$, つまり $U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$. これは a が $X \setminus Y$ の触点であることを表している。さらに $a \in \overline{Y} \setminus Y^o$ なら a は Y の触点でもあるため $a \in \partial Y$. よって $\overline{Y} \subset Y^o \cup \partial Y$. 従って $\overline{Y} = Y^o \cup \partial Y$. また $a \in Y^o$ なら $a \in U$, $U \subset Y$ となる開集合 Y が存在するが、この時 $U \cap (X \setminus Y) = \emptyset$ だから $a \notin \partial Y$ となり $Y^o \cap \partial Y = \emptyset$ が分かる。

問題 7. $A = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ $(\alpha < \beta)$ とする。$\mathbb{R}$ の Euclid 距離から定まる距離位相 $\mathcal{O}$ について $A^o = (\alpha, \beta)$, $\overline{A} = [\alpha, \beta]$, $\partial A = \{\alpha, \beta\}$ である。実際 $x \in (\alpha, \beta)$ なら $\varepsilon > 0$ で $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (\alpha, \beta)$ となるものが取れるから $(\alpha, \beta) \subset A^o$. また $\alpha + \varepsilon < \beta$ を満たす任意の $\varepsilon > 0$ に対して $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \cap A = [\alpha, \alpha + \varepsilon) \neq \emptyset$ だから $\alpha \notin A^o$ かつ $\alpha \in \overline{A}$. 更に

$$(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus A) = ((\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon) \cap (-\infty, \alpha)) \cup ((\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon) \cap (\beta, +\infty)) = (\alpha-\varepsilon, \alpha) \neq \emptyset$$

だから $\alpha \in \partial A$. 同様にして $\beta \in \partial A$, $\beta \notin A^o$ となる。$x < \alpha$ なら $x + \varepsilon < \alpha$ となる $\varepsilon > 0$ が取れる。また $x > \beta$ なら $x - \varepsilon > \beta$ となる $\varepsilon > 0$ が取れるから、いずれにしても $x \notin \overline{A}$. $\partial A \subset \overline{A}$ なので、以上より $A^o = (\alpha, \beta)$, $\overline{A} = [\alpha, \beta]$, $\partial A = \{\alpha, \beta\}$.

次に位相 $\mathcal{O}_S$ については $A^o = [\alpha, \beta)$, $\overline{A} = [\alpha, \beta]$, $\partial A = \{\beta\}$ である。実際 $x \in [\alpha, \beta)$ ならば $x + \varepsilon < \beta$ となる $\varepsilon > 0$ を取ると $[x, x + \varepsilon) \subset A$. よって $x \in A^o$ であり $[\alpha, \beta) \subset A^o$. $x \in \overline{A}$ とすると任意の $\varepsilon > 0$ に対して $[x, x + \varepsilon) \cap [\alpha, \beta] \neq \emptyset$. $x < \alpha$ とすると $x + \varepsilon < \alpha$ となる $\varepsilon > 0$ が取れる。この時 $[x, x + \varepsilon) \cap [\alpha, \beta] = \emptyset$. また $x > \beta$ とすると任意の $\varepsilon > 0$ に対して $[x, x + \varepsilon) \cap [\alpha, \beta] = \emptyset$. よって $\overline{A} \subset [\alpha, \beta] = A$ であり、$A \subset \overline{A}$ だから $\overline{A} = A$. $\beta < b$ となる任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して $[\beta, b) \cap A = \{\beta\} \neq [\beta, b)$ だから $\beta \notin A^o$ であり、$[\beta, b) \cap (\mathbb{R} \setminus A) = (\beta, b) \neq \emptyset$ より $\beta \in \partial A$. 一般に $A^o \cup \partial A = \overline{A}$, $A^o \cap \partial A = \emptyset$ であるが、$[\alpha, \beta) \subset A^o$, $\beta \in \partial A$, $\overline{A} = A$ が示されたから $A^o = [\alpha, \beta)$, $\partial A = \{\beta\}$ でなくてはならない。

問題 8. $a \in X$ が $A \subset X$ の集積点であるとする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して $U(a; \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}$ は a を含む $(X, \mathcal{O}_d)$ の開集合である。よって $U(a; 1) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$. そこで $x_1 \in U(a; 1) \cap (A \setminus \{a\})$ を取る。$x_1 \in A$, $x_1 \neq a$ であるから $\varepsilon_1 := \min\{1, d(x_1, a)\} > 0$. そこで $x_2 \in U(a; \varepsilon_1/2) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$ を取る。$x_1 \notin U(a; \varepsilon_1/2)$ だから $x_2 \neq x_1$, $x_2 \neq a$, $x_2 \in A$ である。一般に $k \in \mathbb{N}$ に対して $x_1, \ldots, x_k \in A$ と正の数列 $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{k-1}$ を $x_i \neq x_j$ $(i, j = 1, \ldots, k,\ i \neq j)$, $x_i \neq a$, $x_i \in U(a; \varepsilon_{i-1}/2)$ $(i = 2, \ldots, k)$, $\varepsilon_i \leq 1/i$ $(i = 1, \ldots, k-1)$ を満たすものが取れたとする。$\varepsilon_k := \min\{1/k, d(x_1, a), \ldots, d(x_k, a)\}$ とおくと $\varepsilon_k > 0$ であり、$x_i \notin U(a, \varepsilon_k/2)$ $(i = 1, \ldots, k)$ が成り立つ。よって $x_{k+1} \in U(a; \varepsilon_k/2) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$ とすると $x_{k+1} \neq x_i (i = 1, \ldots, k)$, $x_{k+1} \neq a$, $x_{k+1} \in A$ が成り立つ。このようにして異なる点からなる点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ と正の数列 $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\{x_n\} \subset A \setminus \{a\}$, $x_n \in U(a; \varepsilon_{n-1}/2) (n \geq 2)$, $\varepsilon_n \leq 1/n$ となるものが取れる。$d(x_{n+1}, a) < \varepsilon_n/2 \leq 1/(2n)$ より $\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$, つまり $x_n \to a$ が成り立つ。

逆に異なる点からなる $\{x_n\} \subset A$ で $\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$ となったとする。$\{x_n\}$ は異なる点からなるから $x_k = a$ となる k は高々一つである。必要なら $x_k = a$ を $\{x_n\}$ から除き $x_n \neq a (n \in \mathbb{N})$ と仮定してよい。a を含む任意の $U \subset \mathcal{O}_d$ を取る。ある $\varepsilon > 0$ が存在し $U(a; \varepsilon) \subset U$ となる。この時番号 N で任意の $n \geq N$ に対して $d(x_n, a) < \varepsilon$ となるものを取ると $x_N \in U(a; \varepsilon) \cap (A \setminus \{a\})$ である。よって特に $\emptyset \neq U(a; \varepsilon) \cap (A \setminus \{a\}) \subset U \cap (A \setminus \{a\})$ だから a は A の集積点である。

問題 9. (1) $0 \notin \emptyset \subset \mathbb{R}$ だから $\emptyset \in \mathcal{O}$. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ だから $\mathbb{R} \in \mathcal{O}$. よって条件 (O_1) が成り立つ。$U, V \in \mathcal{O}$ とする。$0 \notin U \cap V$ ならば $U \cap V \in \mathcal{O}$ だから $0 \in U \cap V$ と仮定する。この時 $\mathbb{R} \setminus U$, $\mathbb{R} \setminus V$ は高々可算集合である。よって $\mathbb{R} \setminus (U \cap V) = (\mathbb{R} \setminus U) \cup (\mathbb{R} \setminus V)$ も高々可算集合だから条件 (O_2) が成り立つ。集合 Λ の任意の元 λ に対して $U_\lambda \in \mathcal{O}$ が与えられているとする。任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $0 \notin U_\lambda$ なら定義から $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$ である。そこである $\mu \in \Lambda$ に対して $0 \in U_\mu$ と仮定する。$0 \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ であり

$$\mathbb{R} \setminus \textstyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (\mathbb{R} \setminus U_\lambda) \subset \mathbb{R} \setminus U_\mu$$

$\mathbb{R} \setminus U_\mu$ が高々可算集合だから、その部分集合も高々可算。従って $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$ となり条件 (O_3) が成り立つ。よって $\mathcal{O}$ は $\mathbb{R}$ の位相である。
(2) 0 を含む任意の $U \in \mathcal{O}$ を取ると $\mathcal{O}$ の定義から $\mathbb{R} \setminus U$ は高々可算集合。$\mathbb{R}$ は非可算集合だから $U \setminus \{0\} \neq \emptyset$. 従って $U \cap A = U \setminus \{0\} \neq \emptyset$ だから 0 は $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ の集積点である。
(3) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ を異なる点からなる点列とし $U := \mathbb{R} \setminus \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とする。$x_n \in A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ だから $x_n \neq 0$ である。よって $0 \in U$. また $\mathbb{R} \setminus U = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は可算集合だから $U \in \mathcal{O}$ である。しかし任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \notin U$ だから, $\{x_n\}$ は 0 に収束しない。

問題 10. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の恒等写像 $\iota : X \to X$ は $(X, \mathcal{O})$ からそれ自身への同相写像である。従って $(X, \mathcal{O}) \cong (X, \mathcal{O})$ となる。$(X, \mathcal{O}(X)) \cong (Y, \mathcal{O}(Y))$ として $f : (X, \mathcal{O}(X)) \to (Y, \mathcal{O}(Y))$ を同相写像とすると $g := f^{-1} : (Y, \mathcal{O}(Y)) \to (X, \mathcal{O}(X))$ も同相写像である。従って $(Y, \mathcal{O}(Y)) \cong (X, \mathcal{O}(X))$ となる。最後に $(X, \mathcal{O}(X)) \cong (Y, \mathcal{O}(Y))$, $(Y, \mathcal{O}(Y)) \cong (Z, \mathcal{O}(Z))$ と仮定し, $f : (X, \mathcal{O}(X)) \to (Y, \mathcal{O}(Y))$, $g : (Y, \mathcal{O}(Y)) \to (Z, \mathcal{O}(Z))$ を同相写像とする。$F := g \circ f : (X, \mathcal{O}(X)) \to (Z, \mathcal{O}(Z))$ は連続であり全単射。さらに $F^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : (Z, \mathcal{O}(Z)) \to (X, \mathcal{O}(X))$ は連続であるから F は同相写像。よって $(X, \mathcal{O}(X)) \cong (Z, \mathcal{O}(Z))$ となり $\cong$ は $\mathcal{X}$ 上の同値関係である。

補足 2. 一般に連続写像の合成は連続である。実際 $F : (X, \mathcal{O}(X)) \to (Y, \mathcal{O}(Y))$, $G : (Y, \mathcal{O}(Y)) \to (Z, \mathcal{O}(Z))$ を連続として $U \in \mathcal{O}(Z)$ とすると $G^{-1}(U) \in \mathcal{O}(Y)$ より $(G \circ F)^{-1}(U) = F^{-1}(G^{-1}(U)) \in \mathcal{O}(X)$. つまり $G \circ F : (X, \mathcal{O}(X)) \to (Z, \mathcal{O}(Z))$ は連続。

問題 11. (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ からそれ自身への連続写像で $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ からそれ自身への連続写像でないものは存在する。これを示す。$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \text{ の時} \\ 0 & x < 0 \text{ の時} \end{cases}$$

とおく。$f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_d) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ は連続ではない。そこで $f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_S) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ が連続であることを示す。$U \in \mathcal{O}_S$, $a \in f^{-1}(U)$ を取る。$a < 0$ なら $a < a/2 < 0$ であり, $0 = f(a) \in U$ である。$x \in [a, a/2)$ の時 $x < 0$ だから $f(x) = 0 \in U$ より $x \in f^{-1}(U)$ となり $[a, a/2) \subset f^{-1}(U)$ が分かる。また $a \geq 0$ なら $1 = f(a) \in U$ である。$b > a$ となる b と $x \in [a, b)$ に対して $0 \leq x$ だから $1 = f(x) \in U$ となり $x \in f^{-1}(U)$. つまり $[a, b) \subset f^{-1}(U)$ となる。従って $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_S$ となる。よって $f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_S) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ は連続である。
(2) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ からそれ自身への連続写像ではないが $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ からそれ自身への連続写像であるものも存在する。これを示す。$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $g(x) := x^2$ で定める。$g : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_d) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ は

連続である。また $[1,4) \in \mathcal{O}_S$ であり $g^{-1}([1,4)) = (-2,-1] \cup [1,2)$ となる。$-1 \in g^{-1}([1,4))$ であるが、$-1 < b$ となる任意の b に対して $[-1,b) \not\subset g^{-1}([1,4))$ である。よって $g^{-1}([1,4))$ は $\mathcal{O}_S$ に含まれない。従って g は連続でない。

問題 12. 恒等写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は全単射である。また $U \in \mathcal{O}_d$ とすると問題 7 より $U = f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_S$ である。よって $f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_S) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ は連続である。しかし $f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_S) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ は同相写像ではない。実際 $f^{-1}(x) = x$ であるが, $[0,1) \in \mathcal{O}_S$ に対して $[0,1) = f([0,1)) = (f^{-1})^{-1}([0,1))$ は $\mathcal{O}_d$ に属さない。よって $f^{-1} : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_d) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ は連続ではない。また, $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ と $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ は同相ではない。以下これを連続な全射 $\phi : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_d) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ が存在すると仮定して矛盾を導くことで示す。$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を恒等写像とすると先と同様に $f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_S) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ は連続である。よって合成写像 $\psi := f \circ \phi : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_d) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ は連続な全射。任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $[a,+\infty)$ は $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ の閉集合だから $A(a) := \psi^{-1}([a,+\infty))$ は $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ の閉集合。ところが f が恒等写像だから $f^{-1}([a,+\infty)) = [a,+\infty)$. よって $A(a) = \psi^{-1}([a,+\infty)) = \phi^{-1}(f^{-1}([a,+\infty))) = \phi^{-1}([a,+\infty))$ となる。$[a,+\infty) \in \mathcal{O}_S$ であり $\phi : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_d) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ は連続だから $A(a) = \phi^{-1}([a,+\infty)) \in \mathcal{O}_d$ となる。つまり任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $A(a) = \phi^{-1}([a,+\infty))$ は $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ の開集合でありかつ閉集合でもある。ここで次の事実を用いる (証明は以下の補足を参照)。

> $\mathcal{O}_d$ を $\mathbb{R}$ のユークリッド距離から定まる距離位相とする。この時 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ の開集合であり, かつ閉集合である部分集合は $\emptyset$ かまたは $\mathbb{R}$ に一致する。

これを用いると任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $A(a) = \phi^{-1}([a,+\infty))$ は $\emptyset$ かまたは $\mathbb{R}$ 全体である。ϕ は全射であるから任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $\phi(c) = a - 1$ となる $c \in \mathbb{R}$ が存在する。特に $c \notin A(a)$ だから $A(a) \neq \mathbb{R}$. よって $A(a) = \phi^{-1}([a,+\infty)) = \emptyset$ となる。一方 ϕ が全射だから $\phi(d) = a$ となる $d \in \mathbb{R}$ が存在する。よって $d \in A(a) = \emptyset$ となり矛盾である。

補足 3. 実は任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $[a,+\infty)$ は $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ の開集合でありかつ閉集合となる。従って特に $A(a) = \phi^{-1}([a,+\infty))$ は $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ の開集合かつ閉集合となる。このことを示しておく。任意の $c \in [a,+\infty)$ を取ると $[c,c+1) \subset [a,+\infty)$ だから $[a,+\infty) \in \mathcal{O}_S$. また $c \in [a,+\infty)^c = (-\infty,a)$ とすると $c < a$ より $c < b < a$ となる $b \in \mathbb{R}$ が取れる。よって $[c,b) \subset (-\infty,a)$. 従って $(-\infty,a) \in \mathcal{O}_S$ となり $[a,+\infty) = (-\infty,a)^c$ が閉集合となる。

補足 4. 問題 12 の解答で $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ への連続な全射は存在しないことを示した。では連続写像 $f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_d) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ はどのような関数だろうか。$(\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ への連続写像は沢山ある (何故でしょうか?)。一方で次が成り立つ。

> $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ への連続写像は定数関数に限る。

以下でこれを示そう。定数関数は明らかに $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ への連続関数である。そこで $f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_d) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ を連続としましょう。先の事実 (以下の補足 5 で証明する) と補足 3 から、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f^{-1}([a,+\infty))$ は $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ の開集合かつ閉集合なので $f^{-1}([a,+\infty)) = \mathbb{R}$ または $f^{-1}([a,+\infty)) = \emptyset$ となる。そこで任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $x \in f^{-1}([f(x),+\infty)) \neq \emptyset$. よって $f^{-1}([f(x),+\infty)) = \mathbb{R}$. これは任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して

$f(x) \le f(y)$ を表している。$x, y \in \mathbb{R}$ は任意だったので $f(y) \le f(x)$ も成り立つ。つまり $f(x) = f(y)$ となり f は定数関数となる。

補足 5. 問題 12 の解答で用いた事実は「$(\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ は連結である」と同じことである。これを直接示しておく。$A \subset \mathbb{R}$ を開集合かつ閉集合となる部分集合として $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{R}$ と仮定して矛盾を導く。$B := \mathbb{R} \setminus A$ とおくと A, B は空でない開集合で $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{R}$ となる。$a \in A, b \in B$ を取ると $a \neq b$. そこで $a < b$ と仮定する ($b < a$ の時は以下で A と B, a と b をそれぞれ置き換えて議論すれば良い)。$c := \sup(A \cap [a, b])$ とする。$x_n \in A \cap [a, b]$ で $x_n \to c$ となる点列 $\{x_n\}$ を取る。$[a, b]$ は閉集合で仮定から A も閉集合だから $c \in A \cap [a, b]$. 特に $c \le b$ だが、$b \in B$ で $A \cap B = \emptyset$ だから $c < b$. また $c = \sup(A \cap [a, b])$ なので $A \cap (c, b] = \emptyset$ となる。よって $A \cup B = \mathbb{R}$ より $(c, b] \subset B$. 先と同様に $B = \mathbb{R} \setminus A$ は閉集合だから $c \in B$. つまり $c \in A \cap B$. これは $A \cap B = A \cap (\mathbb{R} \setminus A) = \emptyset$ に矛盾する。

問題 13. (1) $f : \mathbb{R} \to (0, 1)$, $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ は同相写像である。これを示す。まず f は $\mathbb{R}$ 上の関数として連続。また $0 < \frac{e^x}{1+e^x} < 1$ だから f は $\mathbb{R}$ から $(0, 1)$ への連続写像。次に 任意の $y \in (0, 1)$ に対して $0 < y/(1-y)$ である。従って写像 $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ を $g(y) := \log(y/(1-y))$ で定めるとこれは連続。さらに $f \circ g(y) = y$, $g \circ f(x) = x$ が任意の $x \in \mathbb{R}$, $y \in (0, 1)$ に対して成り立つから $f : \mathbb{R} \to (0, 1)$ は全単射で $g = f^{-1}$ となる。f も $g = f^{-1}$ も連続であるから $f : \mathbb{R} \to (0, 1)$ は同相写像である。
(2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g(x) = e^{2\pi i x}$ は連続である。また $g(\mathbb{R}) = S^1$ である。よって $f = g|_{[0,1)} : [0, 1) \to S^1$ は連続。任意の $z \in S^1$ に対して $|z| = 1$ だから $z = e^{2\pi i t}$ となる $t \in \mathbb{R}$ が取れる。$x = t - [t]$ ($[t]$ は t 以下の最大の整数) とすると $f(x) = e^{2\pi i(t-[t])} = e^{2\pi i t} = z$ となるから $f : [0, 1) \to S^1$ は全射。さらに $s, t \in [0, 1)$, $f(s) = f(t)$ とすると $e^{2\pi i(t-s)} = 1$ より $t - s \in \mathbb{Z}$. ところが $-1 < t - s < 1$ より $t = s$ なので $f : [0, 1) \to S^1$ は連続な全射。

次に $f : [0, 1) \to S^1$ が同相写像ではないことを示す。その為には $[0, 1)$ の開集合 U で $f(U)$ が S^1 の開集合でないものを見つければよい。$U := [0, 1/4)$ とおく。$U = (-1/4, 1/4) \cap [0, 1)$ であり $(-1/4, 1/4)$ は $\mathbb{R}$ の開集合だから U は $[0, 1)$ の開集合。また $f(U) = \{e^{2\pi i x} \mid 0 \le x < 1/4\}$ であるがこれは S^1 の開集合ではない。実際 $1 \in \mathbb{C}$ は $1 \in f(U)$ を満たすが、1 を含む S^1 の開集合は $\mathbb{C}$ の 1 を含む開集合 V を用いて $S^1 \cap V$ と書ける。任意の $0 < \varepsilon$ に対して $U(1; \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < \varepsilon\}$ は 1 を含む $\mathbb{C}$ の開集合である。$\varepsilon < 1$ として θ を $0 < \theta(\varepsilon)$ を $\cos(2\pi\theta(\varepsilon)) = 1 - \varepsilon^2/2$ となるものとする ($\theta(\varepsilon)$ は $0 < \varepsilon < 1$ に対して一意的に定まり $0 < \theta(\varepsilon) < 1/4$ である)。$0 < t < \theta(\varepsilon)$ とすると $e^{-2\pi i t} \in U(1, \varepsilon) \cap S^1$. しかし $0 < t < \theta(\varepsilon)$ に対して $e^{2\pi i x} = e^{-2\pi i t}$ となる $x \in [0, 1)$ は $0 < t < 1/4$ より $x = 1 - t$ であるが、この時 $3/4 < x < 1$ だから $e^{2\pi i x} = e^{-2\pi i t} \notin f(U)$. つまり $U(1; \varepsilon) \cap S^1 \not\subset f(U)$ が $0 < \varepsilon < 1$ に対して成り立ち $1 \in f(U)$ は $f(U)$ の内点ではない。よって $f(U)$ は S^1 の開集合ではない。

問題 14. (1) 恒等写像 $f : X \to X$ が $(X, \mathcal{O}_1)$ から $(X, \mathcal{O}_2)$ への連続写像だと仮定する。$U \in \mathcal{O}_2$ を取ると $U = f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_1$ だから $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$. 逆に $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ と仮定し $U \in \mathcal{O}_2$ とする。この時 $f^{-1}(U) = U \in \mathcal{O}_1$ だから f は $(X, \mathcal{O}_1)$ から $(X, \mathcal{O}_2)$ への連続写像である。
(2) 仮定から $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}(Y)$ に注意する。任意の $V \in \mathcal{O}$ をとると $V \in \mathcal{O}(Y)$ である。$f : (X, \mathcal{O}(X)) \to (Y, \mathcal{O}(Y))$ は連続だから $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X)$ である。これは $f : (X, \mathcal{O}(X)) \to (Y, \mathcal{O})$ が連続であることを表している。

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 15. 簡単のため $\mathcal{O}_f(X)$ を $\mathcal{O}_f$ と書くことにする。
(1) $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$, $X = f^{-1}(Y)$ だから $\emptyset, X \in \mathcal{O}_f$ であり条件 (O_1) が成り立つ。$U, V \in \mathcal{O}_f$ とする。$U = f^{-1}(A), V = f^{-1}(B)$ となる $A, B \in \mathcal{O}(Y)$ が存在する。$U \cap V = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B)$, $A \cap B \in \mathcal{O}(Y)$ だから $U \cap V \in \mathcal{O}_f$ となり, 条件 (O_2) が成り立つ。集合 Λ の任意の元 λ に対して $U_\lambda \in \mathcal{O}_f$ が与えられているとする。任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $U_\lambda = f^{-1}(A_\lambda)$ となる $A_\lambda \in \mathcal{O}(Y)$ を取ることが出来る。よって $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(A_\lambda) = f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)$ であるが $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \mathcal{O}(Y)$ だから $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}_f$ となり条件 (O_3) が成り立つ。
(2) $V \in \mathcal{O}(Y)$ とすると定義から $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_f$ だから $f : (X, \mathcal{O}_f) \to (Y, \mathcal{O}(Y))$ は連続。
(3) $f : (X, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}(Y))$ は連続と仮定し $U \in \mathcal{O}_f$ をとる。$U = f^{-1}(V)$ となる $V \in \mathcal{O}(Y)$ が存在する。仮定から $U = f^{-1}(V) \in \mathcal{O}$ だから $\mathcal{O}_f \subset \mathcal{O}$ となる。逆に $\mathcal{O}_f \subset \mathcal{O}$ と仮定し $V \in \mathcal{O}(Y)$ を取る。$f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_f \subset \mathcal{O}$ だから $f : (X, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}(Y))$ は連続である。

問題 16. 簡単のため $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}_{f_1,f_2}(X)$ と書くことにする。
(1) 任意の $x \in X$ に対して $x \notin \emptyset$ だから $\emptyset \in \mathcal{O}(X)$. また任意の $x \in X$ に対して $x \in X = f_1^{-1}(Y_1) \cap f_2^{-1}(Y_2)$ である。よって $X \in \mathcal{O}(X)$ だから条件 (O_1) が成り立つ。$U, V \in \mathcal{O}(X)$, $x \in U \cap V$ とする。この時 $V_i, W_i \in \mathcal{O}_i$ $(i = 1, 2)$ が存在して $x \in f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2) \subset U$, $x \in f_1^{-1}(W_1) \cap f_2^{-1}(W_2) \subset V$ が成り立つ。すると

$$x \in f_1^{-1}(V_1) \cap f_1^{-1}(W_1) \cap f_2^{-1}(V_2) \cap f_2^{-1}(W_2) = f_1^{-1}(V_1 \cap W_1) \cap f_2^{-1}(V_2 \cap W_2) \subset U \cap V.$$

$V_i \cap W_i \in \mathcal{O}_i$ $(i = 1, 2)$ だから $U \cap V \in \mathcal{O}(X)$ となり条件 (O_2) が成立。集合 Λ の各元 λ に対して $U_\lambda \in \mathcal{O}(X)$ が与えられているとし $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ をとる。$x \in U_\mu$ となる $\mu \in \Lambda$ が存在するので $x \in f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2) \subset U_\mu$ となる $V_i \in \mathcal{O}_i$ $(i = 1, 2)$ が存在する。よって

$$x \in f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2) \subset U_\mu \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

だから $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}(X)$ となり条件 (O_3) が成り立つ。
(2) f_1 が $(X, \mathcal{O}(X))$ から $(Y_1, \mathcal{O}_1)$ への連続写像であることを示す (f_2 についても同様である)。定義から任意の $V_i \in \mathcal{O}_i$ に対して $f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2) \in \mathcal{O}(X)$ であることに注意。任意の $V_1 \in \mathcal{O}_1$ を取る。この時 $f_1^{-1}(V_1) = f_1^{-1}(V_1) \cap X = f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(Y_2)$ だから $f_1^{-1}(V_1) \in \mathcal{O}(X)$ となる。よって f_1 は $(X, \mathcal{O}(X))$ から $(Y_1, \mathcal{O}_1)$ への連続写像である。
(3) f_i が $(X, \mathcal{O})$ から $(Y_i, \mathcal{O}_i)$ への連続写像であると仮定する。$U \in \mathcal{O}(X)$ とする。任意の $x \in U$ に対して $x \in f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2) \subset U$ となる $V_i \in \mathcal{O}_i$ $(i = 1, 2)$ が存在する。$f_i : (X, \mathcal{O}) \to (Y_i, \mathcal{O}_i)$ が連続だから $f_i^{-1}(V_i) \in \mathcal{O}$. よって $f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2) \in \mathcal{O}$ となる。これは任意の $x \in U$ が位相 $\mathcal{O}$ について U の内点であることを表している。従って $U \in \mathcal{O}$ となる。よって $\mathcal{O}(X) \subset \mathcal{O}$ である。逆に $\mathcal{O}(X) \subset \mathcal{O}$ を仮定する。この時 $f_1 : (X, \mathcal{O}) \to (Y_1, \mathcal{O}_1)$ が連続であることを示す (f_2 についても同様である)。任意に $V_1 \in \mathcal{O}_1$ を取る。設問 (2) より $f_1^{-1}(V_1) \in \mathcal{O}(X)$ だが $\mathcal{O}(X) \subset \mathcal{O}$ だから $f_1^{-1}(V_1) \in \mathcal{O}$ である。これは $f_1 : (X, \mathcal{O}) \to (Y_1, \mathcal{O}_1)$ が連続であることを表している。
(4) $f : (Z, \mathcal{O}(Z)) \to (X, \mathcal{O}(X))$ が連続であると仮定する。$f_1 \circ f : (Z, \mathcal{O}(Z)) \to (Y_1, \mathcal{O}_1)$ が連続であることを示す ($f_2 \circ f$ も同様)。$V_1 \in \mathcal{O}_1$ を取る。設問 (2) より $f_1^{-1}(V_1) \in \mathcal{O}(X)$ であり $f : (Z, \mathcal{O}(Z)) \to (X, \mathcal{O}(X))$ が連続だから $(f_1 \circ f)^{-1}(V_1) = f^{-1}(f_1^{-1}(V_1)) \in \mathcal{O}(Z)$ となる。従って $f_1 \circ f : (Z, \mathcal{O}(Z)) \to (Y_1, \mathcal{O}_1)$ は連続である。次に $f_i \circ f : (Z, \mathcal{O}(Z)) \to (Y_i, \mathcal{O}_i)$

$(i=1,2)$ が連続だと仮定する。$U \in \mathcal{O}(X)$ と $z \in f^{-1}(U)$ を取る。$x := f(z) \in U$ だからある $V_i \in \mathcal{O}_i$ $(i=1,2)$ が存在して $x = f(z) \in f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2) \subset U$ となる。従って

$$z \in f^{-1}(f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2)) = (f_1 \circ f)^{-1}(V_1) \cap (f_2 \circ f)^{-1}(V_2) \subset f^{-1}(U)$$

となる。仮定から $f_i \circ f : (Z, \mathcal{O}(Z)) \to (Y_i, \mathcal{O}_i)$ は連続だから $(f_1 \circ f)^{-1}(V_1) \cap (f_2 \circ f)^{-1}(V_2) \in \mathcal{O}(Z)$. これは $f^{-1}(U)$ の任意の点 z が $f^{-1}(U)$ の内点であることを表している。従って $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}(Z)$ であり $f : (Z, \mathcal{O}(Z)) \to (X, \mathcal{O}(X))$ が連続であることが分かった。

問題 17. (1) $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{O}(X)$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{O}(X)$ より $Y, \emptyset \in \mathcal{O}_f(Y)$ だから条件 (O_1) が成り立つ。次に $U, V \in \mathcal{O}_f(Y)$ とすると

$$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X)$$

だから $U \cap V \in \mathcal{O}_f(Y)$ で条件 (O_2) が成り立つ。集合 Λ の任意の元 $\lambda \in \Lambda$ に対して $U_\lambda \in \mathcal{O}_f(Y)$ が与えられているとする。この時

$$f^{-1}(\cup_\lambda U_\lambda) = \cup_\lambda f^{-1}(U_\lambda) \in \mathcal{O}(X)$$

だから $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}_f(Y)$ となり条件 (O_3) が成り立つから $\mathcal{O}_f(Y)$ は Y の位相である。
(2) 任意の $U \in \mathcal{O}_f(Y)$ に対して $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}(X)$ であるから $f : X \to Y$ は連続である。
(3) $f : X \to Y$ が $(X, \mathcal{O}(X))$ から $(Y, \mathcal{O})$ への連続写像と仮定する。$U \in \mathcal{O}$ を取る。f が連続だから $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}(X)$ である。よって $\mathcal{O}_f(Y)$ の定義から $U \in \mathcal{O}_f(Y)$ となる。従って $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_f(Y)$ となる。逆に $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_f(Y)$ と仮定する。$U \in \mathcal{O}$ に対して $U \in \mathcal{O}_f(Y)$ だから $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}(X)$ である。よって $f : (X, \mathcal{O}(X)) \to (Y, \mathcal{O})$ は連続写像である。
(4) $g : Y \to Z$ が $(Y, \mathcal{O}_f(Y))$ から $(Z, \mathcal{O}(Z))$ への連続写像と仮定する。任意の $V \in \mathcal{O}(Z)$ に対して $g^{-1}(V) \in \mathcal{O}_f(Y)$ だから $\mathcal{O}_f(Y)$ の定義から $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathcal{O}(X)$. よって $g \circ f : (X, \mathcal{O}(X)) \to (Z, \mathcal{O}(Z))$ は連続。また $g \circ f : (X, \mathcal{O}(X)) \to (Z, \mathcal{O}(Z))$ が連続と仮定する。任意の $V \in \mathcal{O}(Z)$ に対して $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X)$ だから $g^{-1}(V) \in \mathcal{O}_f(Y)$ となる。よって $g : (Y, \mathcal{O}_f(Y)) \to (Z, \mathcal{O}(Z))$ は連続である。

問題 18. 三つの写像 $f : X \to Y$, $p : X \to X/\sim$, $F : X/\sim \to Y$ がある。F の逆写像 $G = F^{-1} : Y \to X/\sim$ は $G(f(x)) = [x]$ と書くことが出来る。特に $F \circ p = f$, $G \circ f = p$ となる。問題 17 (2) より $p : X \to X/\sim$, $f : X \to Y$ は連続。従って問題 17 (4) より F, G は連続となる。よって $F : X/\sim \to Y$ は同相写像である。

問題 19. (1) $x \in \mathbb{R}$ に対して $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$ だから $x \sim x$. $x \sim y$ ならば $y - x = -(x-y) \in \mathbb{Z}$ より $y \sim x$ となる。また $x \sim y$, $y \sim z$ ならば $x - z = (x-y) + (y-z) \in \mathbb{Z}$ だから $x \sim z$ となる。よって $\mathbb{R}$ 上の二項関係 $\sim$ は同値関係である。
(2) $\mathbb{R}/\sim$ の射影 $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ から定まる商位相を $\mathcal{O}$ とし、S^1 の $\mathbb{C}$ の部分空間としての位相を $\mathcal{O}_1$ とする。また $f : \mathbb{R} \to S^1$, $f(t) = e^{2\pi i t}$ は $\mathbb{R}$ から S^1 への全射である。従って f から定まる S^1 の商位相 $\mathcal{O}_f$ を考えることが出来る。また $s \sim t \iff f(s) = f(t)$ が成り立つ。実際 $s \sim t$ と仮定すると $s = t + m$ となる $m \in \mathbb{Z}$ が取れる。この時

$$f(s) = f(t+m) = e^{2\pi i(t+m)} = e^{2\pi i t} e^{2\pi i m} = e^{2\pi i t} = f(t)$$

担当教員: 柳田 伸太郎 研究室: A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

となる。逆に $f(s) = f(t)$ と仮定すると $e^{2\pi is} = e^{2\pi it}$ より $e^{2\pi i(s-t)} = 1$ となる。よって $s - t \in \mathbb{Z}$ だから $s \sim t$ となる。従って $F : \mathbb{R}/{\sim} \to S^1$ を $F([t]) = f(t)$ で定義するとこれは well-defined であり (プリント Y105 問題 9)、さらに問題 18 より F は $(\mathbb{R}/{\sim}, \mathcal{O})$ から $(S^1, \mathcal{O}_f)$ は同相写像となる。従って $(S^1, \mathcal{O}_f)$ と $(S^1, \mathcal{O}_1)$ が同相であることを示せば良い。$\mathcal{O}_f = \mathcal{O}_1$ を示せば恒等写像がこれらの空間の間の同相写像となるから、$\mathcal{O}_f = \mathcal{O}_1$ を示す。そのために $U \in \mathcal{O}_f$ とする。商位相の定義から $f^{-1}(U)$ は $\mathbb{R}$ の開集合であることに注意。$z \in U$ とする。$f(t) = z$ となる $t \in f^{-1}(z) \subset f^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$ をとる。$\varepsilon > 0$ を $\varepsilon < 1/4$ であり、さらに $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset f^{-1}(U)$ となるように取る。この時 $z \in f((t-\varepsilon, t+\varepsilon)) \subset U$ である。また $\mathbb{C}$ の部分集合

$$W := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0,\ z = |z|e^{2\pi i\theta},\ \theta \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)\}$$

は $\mathbb{C}$ の開集合でありさらに $S^1 \cap W = f((t-\varepsilon, t+\varepsilon))$ となるから $f((t-\varepsilon, t+\varepsilon)) \in \mathcal{O}_1$. 従って $U \in \mathcal{O}_1$ である。逆に $U \in \mathcal{O}_1$ を取る。また $t \in f^{-1}(U)$ を取る。この時 $z := f(t) \in U$ であり U は S^1 の $\mathbb{C}$ の部分空間としての位相で開集合だから、ある $\varepsilon > 0$ が存在して上記の W について $z \in W \cap S^1 \subset U$ が成り立つ。実際、z を中心とする半径 $0 < \delta < 1$ の開円板 D で $D \cap S^1 \subset U$ となるものがとれる。$\varepsilon > 0$ を $0 < \cos(2\pi\varepsilon) < 1 - \delta^2/2$ を満たすように取れば $W \cap S^1 \subset D \cap S^1$ となる。この時 $t \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset f^{-1}(U)$ であるから $f^{-1}(U)$ は $\mathbb{R}$ の開集合。従って商位相の定義から $U \in \mathcal{O}_f$ となる。

問題 20. (1) 距離空間 (X, d) の相異なる二点 x, y をとる。$\delta := d(x, y) > 0$ である。$U := U(x; \delta/3)$, $V := U(y; \delta/3)$ とするとこれらは開集合で $x \in U$, $y \in V$. $U \cap V \neq \emptyset$ と仮定すると $a \in U \cap V$ に対して $d(x, a) < \delta/3$, $d(a, y) < \delta/3$ だから $\delta = d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) = 2\delta/3$ となり矛盾する。よって $U \cap V = \emptyset$ であり (X, d) が Hausdorff 空間であることが分かった。
(2) $(X, \mathcal{O})$ を Hausdorff 空間として $A \subset X$ をとる。$\mathcal{O}_A$ を A の部分空間としての位相とする。任意の $x, y \in A$ を取る。$x, y \in X$ で X が Hausdorff 空間だから $U, V \in \mathcal{O}$ で $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する。$x \in (A \cap U)$, $y \in (A \cap V)$, $(A \cap U), (A \cap V) \in \mathcal{O}_A$, $(A \cap U) \cap (A \cap V) = A \cap U \cap V = \emptyset$ だから $(A, \mathcal{O}_A)$ は Hausdorff 空間である。

問題 21. $(X \times Y) \setminus \Gamma$ が開集合であることを示す。$(x, y) \in (X \times Y) \setminus \Gamma$ とすると $y \neq f(x)$. Y は Hausdorff 空間だから Y の二つの開集合 U, V が存在して $f(x) \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$. $f : X \to Y$ は連続だから $f^{-1}(U)$ は X の開集合。$W := f^{-1}(U) \times V$ とおく。W は直積空間 $X \times Y$ の積位相で開集合であり $(x, y) \in W$ である。$(a, b) \in W$ とする。この時 $a \in f^{-1}(U)$, $b \in V$ である。よって $f(a) \in U$ となり $U \cap V = \emptyset$ より $f(a) \notin V$, 特に $b \neq f(a)$ となる。従って $(a, b) \notin \Gamma$ だから $W \subset (X \times Y) \setminus \Gamma$ となる。よって $(X \times Y) \setminus G$ は開集合である。

問題 22. (1) 定義から $X, \emptyset \in \mathcal{O}$ だから条件 (O_1) が成り立つ。$U, V \in \mathcal{O}$ とする。U または V が空集合なら $U \cap V = \emptyset \in \mathcal{O}$ である。$U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ と仮定してよい。U, V のどちらかが $\mathbb{R}$ ならば $U \cap V$ は U または V と一致するから $U, V \neq \mathbb{R}$ と仮定してよい。この時 $\mathbb{R} \setminus (U \cap V) = (\mathbb{R} \setminus U) \cup (\mathbb{R} \setminus V)$ で $\mathbb{R} \setminus U$ も $\mathbb{R} \setminus V$ も有限集合だから $\mathbb{R} \setminus (U \cap V)$ も有限集合となり $U \cap V \in \mathcal{O}$. よって条件 (O_2) が成り立つ。集合 Λ の元 $\lambda \in \Lambda$ に対して $U_\lambda \in \mathcal{O}$ が与えられているとする。ある λ に対して $U_\lambda = \mathbb{R}$ ならば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \mathbb{R}$ となるから任意の λ

担当教員: 柳田 伸太郎 研究室: A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

に対して $U_\lambda \neq \mathbb{R}$ と仮定する。この時 $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(\mathbb{R} \setminus U_\lambda)$ であり各 $\mathbb{R} \setminus U_\lambda$ は有限集合または $\mathbb{R}$ 全体である。これらのうち一つでも有限集合があれば $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(\mathbb{R} \setminus U_\lambda)$ は高々有限集合である。全ての $\mathbb{R} \setminus U_\lambda$ が $\mathbb{R}$ 全体なら $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \emptyset$. いずれにしても $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$ となり条件 (O_3) が成り立つ。
(2) 相異なる二点 $x, y \in \mathbb{R}$ を取る。$U := \mathbb{R} \setminus \{y\}$ とする。$x \neq y$ だから $x \in U$ であり $y \notin U$ である。また $\mathbb{R} \setminus U = \{y\}$ だから $U \in \mathcal{O}$ となり主張が示された。
(3) 相異なる二点 $x, y \in \mathbb{R}$ を取る。$x \in U$, $y \in V$ となる $U, V \in \mathcal{O}$ を取る。U と V のどちらかが $\mathbb{R}$ なら $U \cap V \neq \emptyset$ だから $U, V \neq \mathbb{R}$ と仮定する。この時 $\mathbb{R} \setminus U$, $\mathbb{R} \setminus V$ は (空でない) 有限集合である。従って $(\mathbb{R} \setminus U) \cup (\mathbb{R} \setminus V) = \mathbb{R} \setminus (U \cap V)$ は有限集合となる。$\mathbb{R}$ は無限集合だから $U \cap V \neq \emptyset$ であり $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ が Hausdorff 空間ではないことが分かった。

問題 23. 以下では任意の $\varepsilon > 0$ に対して $O_\varepsilon := (-\varepsilon, 0) \cup \{p\} \cup (0, \varepsilon)$ とおく。
(1) 明らかに $X \in \mathcal{O}$. また定義から $\emptyset \in \mathcal{O}$ であるから条件 (O_1) が成り立つ。$U, V \in \mathcal{O}$, $x \in U \cap V$ とする。$x \neq p$ なら定義からある $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ が存在して $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset U$, $(x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subset U$ が成り立つから、$\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とおくと $\varepsilon > 0$ であり $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset U \cap V$. また $x = p$ ならやはりある $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ が存在して $O_{\varepsilon_1} \subset U$, $O_{\varepsilon_2} \subset V$ が成り立つ。再び $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とおくと $O_\varepsilon \subset O_{\varepsilon_1} \cap O_{\varepsilon_2} \subset U \cap V$ となるから条件 (O_2) が成り立つ。Λ を集合として任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $U_\lambda \in \mathcal{O}$ が与えられているとする。任意の $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ を取る。ある $\mu \in \Lambda$ が存在して $x \in U_\mu$ となる。$x \neq p$ ならば $U_\mu \in \mathcal{O}$ より、x を含むある開区間 $I \subset \mathbb{R}$ で $I \subset U_\mu \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ となるものが存在する。また $x = p$ ならある $\varepsilon > 0$ が存在して $O_\varepsilon \subset U_\mu \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ となるから条件 (O_3) が成り立つ。
(2) まず $\mathbb{R}$ の開集合は X の開集合であることに注意する。また $V \in \mathcal{O}$ で $p \notin V$ なら $V \subset \mathbb{R}$ であるから, $\mathcal{O}$ の定義から V は $\mathbb{R}$ の開集合である。つまり p を含まない X の開集合は $\mathbb{R}$ の開集合でもある。

任意の $x \in X$ を取る。$x \neq p$ の時、x を含む $\mathbb{R}$ の開区間 I をとる。I は X においても開集合である。I を $\mathbb{R}$ の部分空間と考えたものを $(I, \mathcal{O}_I)$, I を X の部分空間と考えたものを $(I, \mathcal{O}'_I)$ とする。この時 $\mathcal{O}_I = \mathcal{O}'_I$ を示せば、I 上の恒等写像が $(I, \mathcal{O}_I)$ から $(I, \mathcal{O}'_I)$ への同相写像となる。$U \in \mathcal{O}_I$ とする。I 自身が $\mathbb{R}$ の開集合だから部分空間の位相 $\mathcal{O}_I$ の定義より U も $\mathbb{R}$ の開集合となる。よって $U \in \mathcal{O}. U = U \cap I$ だから $U \in \mathcal{O}'_I$ である。次に $U \in \mathcal{O}'_I$ とする。ある開集合 $V \in \mathcal{O}$ が存在して $U = I \cap V$ となる。$I \in \mathcal{O}$ だから $U \in \mathcal{O}$ であるが $U \subset \mathbb{R}$ だから U は $\mathbb{R}$ の開集合。従って $U = U \cap I \in \mathcal{O}_I$ となる。

次に $x = p$ の時。$(-1, 1)$ と $O_1 = (-1, 0) \cup \{p\} \cup (0, 1)$ の間の写像 $f : O_1 \to (-1, 1)$ を

$$f(t) := \begin{cases} t & (t \neq p) \\ 0 & (t = p) \end{cases}$$

で定める。これは全単射であり、逆写像 $g = f^{-1} : (-1, 1) \to O_1$ は $g(t) = t (t \neq 0)$, $g(0) = p$ で与えられる。開区間 $U \subset (-1, 1)$ を取る。$0 \notin U$ の時 $U \subset (-1, 0) \cup (0, 1)$ であり先の注意から $f^{-1}(U) = U$ は X の開集合。よって $U = O_1 \cap U$ は O_1 の開集合である。次に $0 \in U$ とする。$f^{-1}(U) = (U \setminus \{0\}) \cup \{p\}$ である。$t \in f^{-1}(U)$ をとる。$t \neq p$ の時は $t \in U$, $t \neq 0$ である。そこで t を含み U に含まれ 0 を含まない開区間 J を取ると $t \in J \subset f^{-1}(U)$ となる。また $t = p$ の時 $\varepsilon > 0$ で $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U$ となるものを取ると $p \in O_\varepsilon \subset f^{-1}(U)$ となる。

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

従って $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}$ だから $f : O_1 \to (-1,1)$ は連続である。次に $g = f^{-1} : (-1,1) \to O_1$ が連続であることを示す。$U \subset O_1$ を開集合とする。$p \notin U$ の時 $g^{-1}(U) = U \subset (-1,1)$ であり、$U \subset \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ の開集合だから $U = U \cap (-1,1)$ は $(-1,1)$ の開集合。また $p \in U$ の時は $U \setminus \{p\} \subset \mathbb{R}$ であり $g^{-1}(U) = (U \setminus \{p\}) \cup \{0\} \subset (-1,1)$ に注意する。$t \in g^{-1}(U)$ をとる。$t \neq 0$ の時 $t \in U$, $t \neq p$ で U は O_1 の開集合だが O_1 は X の開集合だから $U \in \mathcal{O}$. よって t を含み U に含まれ, 0 を含まない開区間 $J \subset \mathbb{R}$ が存在する。この時 $J \subset g^{-1}(U)$ である。$t = 0$ の時, $O_\varepsilon \subset U$ となる $\varepsilon > 0$ を取ると $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset g^{-1}(U)$ となる。従って $g^{-1}(U)$ は $(-1,1)$ の開集合である。よって $g = f^{-1}$ は連続であり $f : O_1 \to (-1,1)$ は同相写像である。

(3) $p, 0 \in X$, $p \neq 0$ である。また p を含む開集合 U と 0 を含む開集合 V を取る。この時ある $\varepsilon > 0$ で $O_\varepsilon \subset U$ かつ $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset V$ となるものが存在する。定義から $O_\varepsilon \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = (-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon) \neq \emptyset$ だから $U \cap V \neq \emptyset$ となる。よって X は Hausdorff 空間ではない。