担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

位相空間と連続写像

作成日: 12/15/2016 更新日: 12/17/2016 Version: 0.2　配布日: 12/22/2016

今回は位相空間とそれらの間の連続写像を取り扱う。まず距離空間とその上の連続写像に関して復習しよう。

問題 0. 二つの距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ とそれらの間の写像 $f : X \to Y$ について、次の三つの条件が同値であることを証明せよ。

(1) 写像 $f : X \to Y$ は連続である。つまり任意の $a \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して、$x \in X$, $d_X(a, x) < \delta$ ならば $d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$ が成り立つ。

(2) 任意の $a \in X$ と a に収束する任意の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ に対して、Y の点列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は点 $f(a) \in Y$ に収束する。

(3) Y の任意の開集合 $V \subset Y$ に対して $f^{-1}(V)$ は X の開集合である。

上記の問題 0 の条件 (3) を用いて位相空間の間の連続写像が定義できる。連続写像を復習する前に、位相空間の定義を思い出しておこう。

位相空間

定義 1. 集合 X の部分集合族 $\mathcal{O}$ は次の三条件を満たす時 X の位相と呼ばれる。

(O_1) 空集合 $\emptyset$ と X は $\mathcal{O}$ に属する。

(O_2) $\mathcal{O}$ に属する X の二つの部分集合 U, V に対して $U \cap V$ は $\mathcal{O}$ に属する。

(O_3) 集合 Λ の任意の元 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\mathcal{O}$ に属する部分集合 U_λ が与えられているとする。このとき $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は $\mathcal{O}$ に属する。

集合 X に位相 $\mathcal{O}$ が定まっている時、組 $(X, \mathcal{O})$ または単に X を位相空間と呼ぶ。位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して $\mathcal{O}$ を開集合系、$\mathcal{O}$ に属する X の部分集合を開集合と呼ぶ。

問題 1. (プリント Y102 問題 12 参照) 距離空間 (X, d) の部分集合 $U \subset X$ が開集合であるとは、任意の $a \in U$ に対してある正の実数 δ が存在して $U(a; \delta) \subset U$ となるようなものであった。但し $U(a; \delta) := \{x \in X \mid d(x, a) < \delta\}$. このような部分集合全体を $\mathcal{O}_d$ と書くことにすると、$\mathcal{O}_d$ は X の位相であることを示せ。

補足 1. 距離空間 (X, d) に対し上述の位相 $\mathcal{O}_d$ を X の距離 d から定まる距離位相と呼ぶ。

問題 2. (プリント Y102 問題 3 参照) Euclid 空間 $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, |\ |)$ とは n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ とその上の Euclid 距離 $d(x, y) = |x - y|$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$ の組のことであった。$d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $d_1(x, y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$ と定義する。d_1 も $\mathbb{R}^n$ の距離関数である。このとき Euclid 距離 d から定まる $\mathbb{R}^n$ の位相 $\mathcal{O}_d$ と距離関数 d_1 から定まる位相 $\mathcal{O}_{d_1}$ は同じである、つまり $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}_{d_1}$ を示せ。

問題 3. 三つの元からなる集合 $X=\{a,b,c\}$ の位相は全部で何個あるか求めよ。

問題 4. 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の部分集合 $A\subset X$ に対して集合 A の部分集合族 $\mathcal{O}_A$ を

$$\mathcal{O}_A := \{U \mid U\subset A,\ U=A\cap O \text{ となる } X \text{ の開集合 } O \text{ が存在する}\}$$

と定義すると $\mathcal{O}_A$ は A の位相となることを示せ。

補足 2. 上の問題で得られた位相空間 $(A,\mathcal{O}_A)$ を $(X,\mathcal{O})$ の部分空間と呼ぶ。

問題 5. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合の族 $\mathcal{O}_S$ を次で定義する。

$$\mathcal{O}_S := \{A\subset\mathbb{R} \mid a\in A \text{ ならばある } b\in\mathbb{R},\ a<b \text{ が存在して } [a,b)\subset A \text{ となる}\}.$$

また $\mathbb{R}$ の Euclid 距離 d から定まる位相を $\mathcal{O}_d$ とする (補足 1 参照)。
(1) $\mathcal{O}_S$ は $\mathbb{R}$ の位相であることを示せ。 (2) $\mathcal{O}_d\subset\mathcal{O}_S$ を示せ。また $\mathcal{O}_d\neq\mathcal{O}_S$ を示せ。

部分集合の閉包, 内部, 境界

定義 2. $(X,\mathcal{O})$ を位相空間とする。

(1) $A\subset X$ が閉集合 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $X\setminus A(=A^c)$ が X の開集合。

(2) $a\in X$ が $A\subset X$ の触点 $\overset{\text{def}}{\iff}$ a を含む任意の開集合 U に対して $U\cap A\neq\emptyset$.

(3) $a\in X$ が $A\subset X$ の集積点 $\overset{\text{def}}{\iff}$ a は $A\setminus\{a\}$ の触点。

(4) $a\in X$ が $A\subset X$ の境界点 $\overset{\text{def}}{\iff}$ a は A の触点でありかつ $X\setminus A$ の触点。

(5) $a\in X$ が $A\subset X$ の内点 $\overset{\text{def}}{\iff}$ a を含むある開集合 U が存在して $U\subset A$.

$A\subset X$ に対して A の内点全体の集合を A^o と書き A の内部と呼ぶ。A の触点全体の集合を $\overline{A}$ と書き A の閉包と呼ぶ。A の境界点全体の集合を ∂A と書き A の境界と呼ぶ。$A\subset X$ が X において稠密であるとは $\overline{A}=X$ が成り立つ時を言う。

問題 6. n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ に Euclid 距離から定まる位相を入れる。部分集合 $A:=\{x={}^t(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid |x|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2<r^2\}$, $B:=\{x={}^t(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2<r^2,\ x_n=0\}$ $(r>0)$ の内部 A^o, B^o, 閉包 $\overline{A},\overline{B}$, 境界 $\partial A,\partial B$ を求めよ。

問題 7. (問題 5 参照) 実数直線 $\mathbb{R}$ の部分集合族

$$\mathcal{O}_S := \{A\subset X \mid a\in A \text{ らばある } b\in\mathbb{R},\ a<b \text{ が存在して } [a,b)\subset A \text{ となる}\}$$

は $\mathbb{R}$ の位相であった。また $\mathbb{R}$ の Euclid 距離から定まる距離位相を $\mathcal{O}_d$ と書く。$\mathbb{R}$ の部分集合 $A:=[\alpha,\beta]$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha<\beta)$ に対し $\mathcal{O}_S,\mathcal{O}_d$ それぞれに関して A^o, $\overline{A}$, ∂A を求めよ。

問題 8. 距離空間 (X,d) の距離位相 $\mathcal{O}_d$ について、$a \in X$ が部分集合 $A \subset X$ の集積点であるためには、A 内の異なる点からなる点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $x_n \to a$, つまり $\lim_{n\to\infty} d(x_n,a)=0$ が成り立つものが存在することが必要十分であることを示せ。

なお上記の問題 8 は一般の位相空間では成り立たない。位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が点 $a \in X$ に収束するとは、a を含む任意の開集合 U に対しある自然数 N が存在し、$n \ge N$ なら $x_n \in U$ となる場合を言う。

問題 9. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合の族 $\mathcal{O}$ を次のように定める。

$$U \in \mathcal{O} \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} U \text{ は } 0 \text{ を含まない } \mathbb{R} \text{ の (単なる) 部分集合であるか、または} \\ 0 \in U \text{ であり } \mathbb{R}\setminus U \text{ は高々可算集合} \end{cases}$$

ただし「高々可算集合」とは空集合か有限集合か無限可算集合のことである。

(1) $\mathcal{O}$ は $\mathbb{R}$ の位相であることを示せ。

(2) 0 は集合 $A := \mathbb{R}\setminus\{0\}$ の集積点であることを示せ。

(3) 設問 (2) の集合 A 内の異なる点からなる点列で 0 に (上記の意味で) 収束するものは存在しないことを示せ。

連続写像

定義 3. $(X,\mathcal{O}(X)), (Y,\mathcal{O}(Y))$ を二つの位相空間とし $f: X \to Y$ を X から Y への写像とする。

(1) 写像 f が $(X,\mathcal{O}(X))$ から $(Y,\mathcal{O}(Y))$ への連続写像であるとは、任意の $U \in \mathcal{O}(Y)$ に対して $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}(X)$ となる時をいう。

(2) 写像 f が $(X,\mathcal{O}(X))$ から $(Y,\mathcal{O}(Y))$ への同相写像であるとは、f が全単射かつ連続で、更に逆写像 f^{-1} が $(Y,\mathcal{O}(Y))$ から $(X,\mathcal{O}(X))$ への連続写像の時をいう。$(X,\mathcal{O}(X))$ から $(Y,\mathcal{O}(Y))$ への同相写像が存在する時、$(X,\mathcal{O}(X)) \cong (Y,\mathcal{O}(Y))$, または単に $X \cong Y$ と書き、$(X,\mathcal{O}(X))$ と $(Y,\mathcal{O}(Y))$ は同相だという。

問題 10. $\mathcal{X}$ を位相空間全体からなる族とする。このとき同相という二項関係 $\cong$ は $\mathcal{X}$ の上の同値関係であることを示せ。

問題 11. (問題 5 参照) $\mathbb{R}$ の位相 $\mathcal{O}_S$ を次で定義する。

$$\mathcal{O}_S := \{A \subset X \mid a \in A \text{ ならばある } b \in \mathbb{R},\ a < b \text{ が存在して } [a,b) \subset A \text{ となる} \}.$$

また $\mathbb{R}$ の Euclid 距離から定まる位相を $\mathcal{O}_d$ とする。

(1) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ からそれ自身への連続写像ではあるが、$(\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ からそれ自身への連続写像ではないようなものは存在するか？存在する場合はその例をあげ、存在しない場合はその証明を与えよ。

(2) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ からそれ自身への連続写像ではないが、$(\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ からそれ自身への連続写像となるものは存在するか？存在する場合はその例をあげ、存在しない場合はその証明を与えよ。

問題 12. 前問と同様に $\mathbb{R}$ の二つの位相 $\mathcal{O}_S, \mathcal{O}_d$ を考える。このとき恒等写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ への連続な全単射写像であることを示せ。また f は同相写像ではないことを示せ。さらに $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$ と $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_d)$ は同相かどうか答えよ。

問題 13. (1) $\mathbb{R}$ には Euclid 距離による距離位相を入れ、$(0,1) \subset \mathbb{R}$ には $\mathbb{R}$ の部分空間としての位相を与える。この時写像 $f : \mathbb{R} \to (0,1)$, $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ は同相写像かどうか答えよ。
$[0,1)$ に $\mathbb{R}$ の部分空間としての位相を入れる。また $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ には $\mathbb{C}$ の Euclid 距離から定まる距離位相による部分空間としての位相を入れる。この時写像 $f : [0,1) \to S^1$, $f(x) = e^{2\pi i x}$ は連続な全単射であることを示せ。また f は同相写像かどうか答えよ。

集合 X 上の二つの位相 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ に対して、$\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より強い位相である、または $\mathcal{O}_2$ は $\mathcal{O}_1$ より弱い位相であるとは $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ が成り立つ場合を言う。

問題 14. (1) 集合 X に二つの位相 $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ があるとする。また $f : X \to X$ を恒等写像とする。f を $(X, \mathcal{O}_1)$ から $(X, \mathcal{O}_2)$ への写像と考えて連続であるためには、$\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より強い位相 $(\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1)$ であることが必要十分であることを示せ。
(2) 二つの位相空間 $(X, \mathcal{O}(X)), (Y, \mathcal{O}(Y))$ の間の連続写像 $f : X \to Y$ があるとする。この時 $\mathcal{O}(Y)$ より弱い Y の任意の位相 $\mathcal{O}$ に対して f は $(X, \mathcal{O}(X))$ から $(Y, \mathcal{O})$ への連続写像であることを示せ。

問題 15. 集合 X から位相空間 $(Y, \mathcal{O}(Y))$ への写像 $f : X \to Y$ があるとする。X の部分集合の族 $\mathcal{O}_f(X)$ を次で定義する。

$$\mathcal{O}_f(X) := \{U \mid U \subset X,\ U = f^{-1}(V) \text{ となる } V \in \mathcal{O}(Y) \text{ が存在する }\}.$$

(1) $\mathcal{O}_f(X)$ は X の位相であることを示せ。

(2) f は $(X, \mathcal{O}_f(X))$ から $(Y, \mathcal{O}(Y))$ への連続写像であることを示せ。

(3) $\mathcal{O}$ を X の位相とする。この時 f が $(X, \mathcal{O})$ から $(Y, \mathcal{O}(Y))$ への連続写像であるためには $\mathcal{O}_f(X) \subset \mathcal{O}$ となることが必要十分であることを示せ。(つまり $\mathcal{O}_f(X)$ は f を連続にする X の位相で最も弱いものである。)

問題 16. 二つの位相空間 $(Y_1, \mathcal{O}_1), (Y_2, \mathcal{O}_2)$ と集合 X があり、$i = 1, 2$ に対して全射 $f_i : X \to Y_i$ が与えられているとする。X の部分集合の族 $\mathcal{O}_{f_1,f_2}(X)$ を次で定義する。

$$U \in \mathcal{O}_{f_1,f_2}(X) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} U \subset X \text{ であり、任意の } x \in U \text{ に対して } V_i \in \mathcal{O}_i\ (i = 1,2) \text{ が存在して } x \in f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2) \subset U \text{ が成り立つ。}$$

(1) $\mathcal{O}_{f_1,f_2}(X)$ は X の位相であることを示せ。

(2) $i=1,2$ に対して f_i は $(X,\mathcal{O}_{f_1,f_2}(X))$ から $(Y_i,\mathcal{O}_i)$ への連続写像であることを示せ。

(3) X の位相 $\mathcal{O}$ に関して $i=1,2$ に対して f_i が $(X,\mathcal{O})$ から $(Y_i,\mathcal{O}_i)$ への連続写像となるためには $\mathcal{O}_{f_1,f_2}(X)\subset\mathcal{O}$ となることが必要十分であることを示せ。(つまり X の位相 $\mathcal{O}_{f_1,f_2}(X)$ は f_1,f_2 の両方を連続にする最も弱い位相である。)

(4) $(Z,\mathcal{O}(Z))$ を位相空間、$f:Z\to X$ を写像とする。f が $(Z,\mathcal{O}(Z))$ から $(X,\mathcal{O}_{f_1,f_2}(X))$ への連続写像であるためには、$i=1,2$ に対して合成写像 $f_i\circ f:Z\to Y_i$ が $(Z,\mathcal{O}(Z))$ から $(Y_i,\mathcal{O}_i)$ への連続写像となることが必要十分であることを示せ。

補足 3. 上の問題に現れた設定で $X=Y_1\times Y_2$ (直積集合) とし、写像 $f_i:X\to Y_i$ を射影としたものが直積集合 $Y_1\times Y_2$ の積位相である。

問題 17. 位相空間 $(X,\mathcal{O}(X))$ から集合 Y への全射 $f:X\to Y$ があるとする。また Y の部分集合の族 $\mathcal{O}_f(Y)$ を次で定義する。

$$\mathcal{O}_f(Y):=\{U\mid U\subset Y,\ f^{-1}(U)\in\mathcal{O}(X)\}.$$

(1) $\mathcal{O}_f(Y)$ は Y の位相であることを示せ。

(2) f は $(X,\mathcal{O}(X))$ から $(Y,\mathcal{O}_f(Y))$ への連続写像であることを示せ。

(3) Y の位相 $\mathcal{O}$ で, f が $(X,\mathcal{O}(X))$ から $(Y,\mathcal{O})$ への連続写像となるためには $\mathcal{O}\subset\mathcal{O}_f(Y)$ となることが必要十分であることを示せ。(つまり Y の位相 $\mathcal{O}_f(Y)$ は $f:X\to Y$ を連続にする最も強い位相である。)

(4) $(Y,\mathcal{O}_f(Y))$ から位相空間 $(Z,\mathcal{O}(Z))$ への写像 $g:Y\to Z$ が連続であるためには、合成写像 $g\circ f:X\to Z$ が $(X,\mathcal{O}(X))$ から $(Z,\mathcal{O}(Z))$ への連続写像となることが必要十分であることを示せ。

補足 4. 上記の問題に現れた Y の位相 $\mathcal{O}_f(Y)$ を全射 $f:X\to Y$ から誘導された位相または商位相、等化位相などと呼ぶ。

問題 18. (前問の続き) 位相空間 $(X,\mathcal{O}(X))$ から集合 Y への全射 $f:X\to Y$ があり、X に二項関係 $\sim$ を $x,y\in X$ に対して「$x\sim y \iff f(x)=f(y)$」で定める。$\sim$ は同値関係であり, 写像 $F:X/{\sim}\to Y,\ F([x])=f(x)$ は全単射であった (プリント Y105 問題 9 参照)。$p:X\to X/{\sim}$ を射影として、$X/{\sim}$ には p から定まる商位相 $\mathcal{O}_p(X/{\sim})$, Y には f から定まる商位相 $\mathcal{O}_f(Y)$ を入れる。この時 F は $(X/{\sim},\mathcal{O}_p(X/{\sim}))$ から $(Y,\mathcal{O}_f(Y))$ への同相写像であることを示せ。

問題 19. $S^1:=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ に $\mathbb{C}$ の Euclid 距離から定まる距離位相の部分空間としての位相を定める。また $\mathbb{R}$ を Euclid 距離から定まる距離位相により位相空間と考える。$x,y\in\mathbb{R}$ に対して「$x\sim y \iff x-y\in\mathbb{Z}$」として $\mathbb{R}$ の二項関係 $\sim$ を定める。

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

(1) $\sim$ は $\mathbb{R}$ 上の同値関係であることを示せ (プリント Y105 問題 2(3) 参照)。

(2) 商集合 $\mathbb{R}/\sim$ は射影 $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ から定まる商位相により位相空間と考える。このとき $\mathbb{R}/\sim$ と S^1 は同相であることを示せ。

Hausdorff 空間

最後に Hausdorff(ハウスドルフ) 空間ついて復習する。

定義 4. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が Hausdorff 空間であるとは、相異なる任意の二点 $x, y \in X$ に対して二つの開集合 $U, V \in \mathcal{O}$ が存在し、$x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$ となる時を言う。

問題 20. (1) 距離空間はその距離位相について Hausdorff 空間となることを示せ。
(2) Hausdorff 空間の部分空間は Hausdorff 空間となることを示せ。

問題 21. 位相空間 X から Hausdorff 空間 Y への連続写像 $f : X \to Y$ があるとする。このとき $X \times Y$ の部分集合 $\Gamma := \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ は閉集合であることを示せ。

問題 22. $\mathbb{R}$ の部分集合族 $\mathcal{O}$ を次で定義する。

$$\mathcal{O} := \{U \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ は有限集合 }\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}.$$

(1) $\mathcal{O}$ は $\mathbb{R}$ の位相であることを示せ。

(2) 相異なる任意の二点 $x, y \in \mathbb{R}$ に対してある $U \in \mathcal{O}$ が存在し $x \in U$, $y \notin U$ が成り立つことを示せ。

(3) 位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ は Hausdorff 空間ではないことを示せ。

問題 23. 実数直線 $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ に含まれない点 p を取る (例えば $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ の実軸を同一視し $p = {}^t(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ などとすると良い)。$X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ の部分集合族 $\mathcal{O}$ を次で定義する。

$$\begin{aligned} U \in \mathcal{O} \overset{\text{def}}{\iff} & U \subset X \text{ であり、} U = \emptyset \text{ か、または任意の } x \in U \text{ に対して} \\ & x \neq p \text{ ならば } x \text{ を含むある開区間 } I \subset \mathbb{R} \text{ が存在して } I \subset U \text{ が成り立ち、} \\ & x = p \text{ ならばある } \varepsilon > 0 \text{ が存在して } (-\varepsilon, 0) \cup \{p\} \cup (0, \varepsilon) \subset U \text{ が成り立つ} \end{aligned}$$

(1) $\mathcal{O}$ は X の位相であることを示せ。

(2) X の任意の点 x に対し、x を含む X の開集合で $\mathbb{R}$ の開集合と同相なものが存在することを示せ。

(3) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は Hausdorff 空間ではないことを示せ。