担当教員: 柳田　伸太郎　研究室: A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

小テスト (01/12)

作成日: 12/26/2016　更新日: 01/16/2017　Version: 1.0　　配布日: 01/26/2017

学生番号 ________________ 名前 ________________

問題 1. X, Y, Z を位相空間とする。
(1) 直積集合 $X \times Y$ 上の (直) 積位相の定義を述べよ。以下 $X \times Y$ と書いたらこの位相を入れた位相空間 (いわゆる (直) 積空間) のことを意味するものとする。
(2) $X \times Y$ と $Y \times X$ が同相であることを示せ。
(3) $f : X \times Y \to Z$ を連続写像とする。$x \in X$ に対し写像 $f_x : Y \to Z$ を $f_x(y) := f(x, y)$ で定める。この時 f_x は連続であることを示せ。

解答
(1) $p_1 : X \times Y \to X$ 及び $p_2 : X \times Y \to Y$ を射影とする。
$\{U \times V \mid U$ は X の開集合、V は Y の開集合 $\}$ を開基 (底) とする $X \times Y$ の位相が一意に存在する。この位相を (直) 積位相という。
(2) $\sigma(x, y) := (y, x)$ で写像 $\sigma : X \times Y \to Y \times X$ を定めると σ は全単射。また U, V をそれぞれ X, Y の任意の開集合とすると $\sigma(U \times V) = V \times U$. これより σ は開連続、つまり開集合を開集合にうつす連続写像である。従って σ は開連続な全単射なので同相写像である。
(3) $z = f(x, y)$ の任意の開近傍 $O \subset Z$ を取る。f の連続性から $(x, y) \in X \times Y$ の開近傍 O' があって $f(O') \subset O$. (直) 積位相の定義から X の開集合の族 $\{U_i\}$ と Y の開集合の族 $\{V_i\}$ があって $O' = \cup_i U_i \times V_i$ と書ける。$(x, y) \in O'$ だから $(x, y) \in U \times V$ なる U, V がそれぞれの族から取れる。すると $f(U \times V) \subset O$. よって $f_x(V) = f(x, V) \subset f(U \times V) \subset O$. 従って f_x は連続である。

3 点+3 点+4 点で採点しました。平均点は 3.6 点でした。
(1) は別の言い方が幾つかあって、例えば「射影が連続写像になるような位相のうち最弱のもの」でも構いません。
(2) で「写像 $X \times Y \to Y \times X$ は連続で全単射だから $\cdots$」のような解答が目立ちました。まず写像の定義をして下さい。さらに連続であることを議論して下さい。
(3) は次のように短縮した議論でも構いません。「$z = f(x, y)$ の任意の開近傍 $O \subset Z$ を取る。f の連続性から $(x, y) \in X \times Y$ の開近傍 O' があって $f(O') \subset O$. (直) 積位相の定義から X の開集合 U と Y の開集合 V で $O' = U \times V$ として良い。すると $f(U \times V) \subset O$. よって $f_x(V) = f(x, V) \subset f(U \times V) \subset O$. 従って f_x は連続である。」

連絡事項

1 月 30 日の演習 (最終回) では小テストを 1 コマ目の後半に行います。また授業アンケートも実施します。