担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

解答 (Lagrange の未定乗数法)

作成日: 12/11/2016　Version: 0.1

問題 1. 点 ${}^t(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ で最大値 $(3+\sqrt{2})/2$ をとり、$\alpha = 1-\sqrt{2}$ とおくと点 ${}^t((\alpha \pm \sqrt{1-2\alpha})/2, (\alpha \mp \sqrt{1-2\alpha})/2)$ で最小値 $1-2\sqrt{2}$ を取る。

これを求めるために Lagrange の未定乗数法を用いる。$g(x,y) := x^2+y^2-1$ とおくと $g'(x,y) = (2x, 2y)$ である。従って任意の ${}^t(x,y) \in g^{-1}(0)$ に対して $g'(x,y) \neq 0$ であることに注意する。$\Phi := x^3+y^3+3xy-\lambda(x^2+y^2-1)$ に対して微分が 0 になるための条件は次のようになる。

$$3x^2+3y-2\lambda x = 0, \quad 3y^2+3x-2\lambda y = 0, \quad x^2+y^2 = 1.$$

この解を求める。$x = 0$ と仮定すると第一式から $y = 0$ となり第三式に矛盾。よって $x \neq 0$. 同様に $y \neq 0$. 次に第一式と第二式を λ について解きまとめると $(x-y)(xy-x-y) = 0$.

$x = y$ はこの解で第三式から $x = \pm 1/\sqrt{2}$ が得られる。また $2\lambda = 3x+3 = 3(1+\sqrt{2})/\sqrt{2}$ となる。これで得られる点は $\pm {}^t(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. 直接計算で $f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (3+\sqrt{2})/2$, $f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = (3-\sqrt{2})/2$ となる。

次に $x \neq y$ のとき $x+y = xy$ となる。これを z とおくと $z^2 = x^2+y^2+2xy = 1+2z$. 従って $z = x+y = xy = 1 \pm \sqrt{2}$ であるが、第三式から $|x|, |y| \leq 1$ なので $|xy| \leq 1$. よって $x+y = xy = 1-\sqrt{2} = \alpha$. $y = \alpha - x$ を第三式に代入して $\alpha^2 = 2\alpha+1$ を用いると $x^2-\alpha x+\alpha = 0$ となって $x = (\alpha \pm \sqrt{1-2\alpha})/2$. また $y = \alpha - x = (\alpha \mp \sqrt{1-2\alpha})/2$. これらを第一式に代入して x の満たす二次方程式で式変形すると $2\lambda/3 = \alpha - 1 = -\sqrt{2}$ となり λ が求まる。これで得られる点は ${}^t((\alpha \pm \sqrt{1-2\alpha})/2, (\alpha \mp \sqrt{1-2\alpha})/2)$.

この点での f の値は直接計算しても良いが、次のように計算すると良い。まず $f(x,y) = f(y,x)$ が成り立つことに注意すると、これらの点で f は同じ値を取る。${}^t(x,y) = {}^t((\alpha + \sqrt{1-2\alpha})/2, (\alpha - \sqrt{1-2\alpha})/2)$ とおくと $x+y = xy = \alpha$ だったから $\alpha^3 = x^3+y^3+3x^2y+3xy^2 = f(x,y)+3xy(x+y-1) = f(x,y)+3\alpha(\alpha-1)$ であり、$\alpha^2 = 2\alpha+1$ より $f(x,y) = \alpha^3-3\alpha(\alpha-1) = \alpha(\alpha^2-3\alpha+3) = -\alpha^2+4\alpha = 2\alpha-1 = 1-2\sqrt{2}$.

これらの値を比べると $1-2\sqrt{2} < 0 < (3-\sqrt{2})/2 < (3+\sqrt{2})/2$. 曲線 $x^2+y^2 = 1$ は有界閉集合であり関数 f は連続であるから、f はこの曲線上で最大値と最小値を取る。また f はこの曲面を含む開集合上で定義されているため、これらの値は極値であるから、上記のどれかである。従って冒頭のような解答となる。

問題 2. (1) $g(x,y) = x-y+1$ だから $g_x = 1$, $g_y = -1$ となり $g'(x) = (1,-1) \neq (0,0)$.
(2) $\Phi_x = -3x^2-12x-\lambda-6$, $\Phi_y = 6y^2+\lambda$, $\Phi_\lambda = -x+y-1$.
(3) $\Phi_x(0,1,-6) = -3\cdot 0^2-12\cdot 0-6-(-6) = 0$, $\Phi_y(0,1,-6) = 6\cdot 1^2+(-6) = 0$, $\Phi_\lambda(0,1,-6) = -0+1-1 = 0$. また条件式 $g(x,y) = 0$ により y を消去すると $f(x,x+1) = x^3+2$. $x > 0$ のとき $f(x,x+1) > 2 = f(0,1)$, $x < 0$ のとき $f(x,x+1) < 2 = f(0,1)$ だから、$x = 0$ の点、つまり ${}^t(x,y) = {}^t(0,1)$ は $f(x,y)$ の極値点ではない。

問題 3. (1) $f(x,y,z) = xy+yz+zx$ は S の点 $\pm {}^t(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ で最大値 1 を取り、原点を通る平面 $x+y+z = 0$ と S の共通部分 (円周) 上の任意の点 ${}^t(x,y,z)$ で最小値 0 を取る。以下でこれを示す。まず $g(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1$ とすると $g'(x,y,z) = 2(x,y,z)$. 従って任意の ${}^t(x,y,z) \in g^{-1}(0)$ に対して $g'(x,y,z) \neq 0$ であることに注意する。

$\Phi := xy + yz + zx - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ の微分が 0 になるための条件は

$$y + z - 2\lambda x = 0, \quad z + x - 2\lambda y = 0, \quad x + y - 2\lambda z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

この解を求める。第一、二式より $2\lambda x - y = 2\lambda y - x$, つまり $(2\lambda + 1)(x - y) = 0$ を得る。

$2\lambda + 1 \neq 0$ のとき $x = y$ である。これを第一式と第三式に代入して $z = (2\lambda - 1)x$, $x = \lambda z$ を得る。x を消去してまとめると $(2\lambda + 1)(\lambda - 1)z = 0$ を得る。もし $z = 0$ なら $x = 0$, よって $y = 0$ となるがこれは第四式の解ではない。従って $z \neq 0$ であり仮定から $2\lambda + 1 \neq 0$. よって $\lambda = 1$ となる。すると第一式より $z = x = y$ となり第四式より $x = \pm 1/\sqrt{3}$. 従ってこれから得られる点は ${}^t(x, y, z) = \pm{}^t(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ であり $f(\pm(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})) = 1$ となる。

次に $2\lambda + 1 = 0$ のときを考える。このとき $x + y + z = 0$ と第四式が方程式となる。これを満たす点 ${}^t(x, y, z)$ に対して $0 = (x + y + z)^2 = 1 + 2f(x, y, z)$ だから $f(x, y, z) = -1/2$.

関数 f は球面 S を含むある開集合上で滑らかであり特に連続。球面 S は有界閉集合だから f は S 上で最大値と最小値を持ち、それらは極値となる。よって最大値と最小値を与える点は上記のどれかとなり、冒頭の解答が得られる。

補足 1. この問題は (高校数学の言葉だと立体ベクトルを用いる) 簡単な解法がある。$u := {}^t(1, 1, 1)$ とする。$p = {}^t(x, y, z) \in S$ に対し $x + y + z = \langle u, p \rangle$ だから $\langle u, p \rangle^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2f(x, y, z) = 1 + 2f(x, y, z)$. 一方 Cauchy-Schwarz の不等式から $0 \leq \langle u, p \rangle^2 \leq |u|^2 |p|^2$ なので $0 \leq 1 + 2f(x, y, z) \leq 3$, つまり $-1/2 \leq f(x, y, z) \leq 1$ が分かる。$f(x, y, z) = -1/2$ となるのは $\langle u, p \rangle = 0$, つまり $x + y + z = 0$ の時。また $f(x, y, z) = 1$ となるのは $|\langle u, p \rangle| = |u||p|$, つまり Cauchy-Schwarz の不等式で等号が成立する時だから実数 c があって $p = cu$ と書ける。$c = \pm 1/\sqrt{3}$ がすぐに求まり、上記の結果が得られる。

(2) $f(x, y, z) = z^2 + xy$ は点 ${}^t(0, 0, \pm 1)$ で最大値 1, 点 $\pm{}^t(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ で最小値 $-1/2$ を取る。以下でこれを示す。先と同様に $g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$ の微分 $g'(x, y, z)$ は $g^{-1}(0)$ 上で 0 にならない。$\Phi = z^2 + xy - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ の微分が 0 となる条件は

$$y - 2\lambda x = 0, \quad x - 2\lambda y = 0, \quad (1 - \lambda)z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

第三式から $z \neq 0$ のとき $\lambda = 1$. このとき第一、二式から $x = 2y = 4x$ となり $x = 0$, よって $y = 0$. 従って $z = \pm 1$. つまり点 ${}^t(0, 0, \pm 1)$ が得られる。また $f(0, 0, \pm 1) = 1$ である。

次に $z = 0$ とする。このとき $x = 0$ なら $y = 0$ となり、これは第四式を満たさない。よって $x \neq 0$. 同様に $y \neq 0$. すると第一、二式を λ について解いて $y/x = x/y$, つまり $x^2 = y^2$. 従って $x = \pm 1/\sqrt{2}$. よってこれから得られる点は $\pm{}^t(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $\pm{}^t(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ であり、$f(\pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)) = 1/2$, $f(\pm(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)) = -1/2$ となる。

f は球面 S を含むある開集合上で C^1 級であり特に連続。更に S は有界閉集合だから f は S 上で最大最小値を取り、それらは S 上の f の極値となる。よって上記の解答を得る。

問題 4. 開いた面が 2×2 の正方形で高さが 1 の直方体が答えである。以下でこれを示す。

作りたい箱の底面 (開いた上面の対の面) の縦を x, 横を y とし、箱の底面からの高さを z とする。このとき体積 V は $V(x, y, z) = xyz$. また表面積は 12 だから $xy + 2(x + y)z = 12$. さらに題意から $x, y, z > 0$. 従って問題は関数 $V(x, y, z) = xyz$ の条件 $x, y, z > 0$,

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

$xy+2(x+y)z=12$ のもとでの最大値を求めることになる。

$$U := \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x>0,\ y>0,\ z>0\}$$

とおくとこれは $\mathbb{R}^3$ の開集合。また $g(x,y,z) := xy+2(x+y)z-12$ とおけば $g'(x,y,z) = (y+2z, x+2z, 2x+2y)$ だから、$g'(x,y,z)=0 \iff x=y=-2z$ かつ $x+y=0.$ $\iff x=y=z=0$ なので、任意の ${}^t(x,y,z) \in U$ に対して $g'(x,y,z) \neq 0$ となる。

次に $\Phi := xyz - \lambda(xy+2zx+2yz-12)$ とおくと、この微分が 0 となるためには

$$yz-\lambda y-2\lambda z=0, \quad zx-\lambda x-2\lambda z=0, \quad xy-2\lambda(x+y)=0, \quad xy+2(x+y)z=12$$

が必要十分。第一、二式より $2\lambda z$ の項を消すと $(x-y)(z-\lambda)=0.$ ここで $x \neq y$ と仮定すると $z=\lambda$ となり、第一式に代入すると $-2z^2=0,$ つまり $z=0$ となる。今は $z>0$ となる極値を考えているから $x=y$ として良い。すると第三式より $x^2-4\lambda x=0.$ 仮定 $x>0$ から $x=4\lambda=y.$ これを第二式に代入して $z=2\lambda.$ 最後にこれらを第四式に代入して $\lambda=\pm 1/2$ となるが、$z=2\lambda>0$ だから $\lambda=1/2.$ 以上より集合

$$G := \{{}^t(x,y,z) \in U \mid g(x,y,z)=0\}$$

上で V の極値点が存在するなら、それは点 ${}^t(x,y,z) = {}^t(2,2,1)$ 以外に無いことが分かった。もし V が G 上で最大値を持つことが示せれば、それは上記の未定乗数法を用いた議論から $(2,2,1)$ のみであるから、この点で V が最大だと分かり冒頭の主張が示されたことになる。但し今までの問題と違い G は有界ではない

そこで次のように考える。以下では ${}^t(x,y,z) \in G$ とする。正の数 $c>0$ を取る。まず $x+y>c$ の時を考える。すると $xy+2cz \leq g(x,y,z)=12$ だから $0 \leq xy \leq 12-2cz,$ 特に $z \leq 6/c$ となる。$xy \leq 12$ だから $V(x,y,z)=xyz \leq 12z \leq 72/c.$ 次に $z>c$ のときを考える。このとき $2c(x+y) \leq xy+2c(x+y) \leq g(x,y,z)=12$ より $x+y \leq 6/c$ となる。よって $x,y \leq 6/c$ である。$xy \leq 6y/c,$ $xy \leq 6x/c$ だから $xy \leq 3(x+y)/c,$ つまり $xy/(x+y) \leq 3/c$ となる。従って $V(x,y,z)=xyz=\frac{xy(12-xy)}{2(x+y)} \leq \frac{6xy}{x+y} \leq 18/c$ となる。以上より $c=72$ と取ると、$x+y>72$ なら $V(x,y,z) \leq 1,$ $z>72$ なら $V(x,y,z) \leq 1/4$ となる。

そこで以下のように H を定めれば、V は $G \setminus H$ で $V(x,y,z) \leq 1$ を満たす。

$$\begin{aligned} H &= \{{}^t(x,y,z) \in G \mid x+y \leq 72,\ z \leq 72\} \\ &= \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z>0,\ x+y \leq 72,\ z \leq 72,\ g(x,y,z)=12\} \end{aligned}$$

次に H の閉包 $\overline{H}$ が有界性であることを示す。

$$\overline{H} = \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \geq 0,\ x+y \leq 72,\ z \leq 72,\ g(x,y,z)=12\}$$

より、${}^t(x,y,z) \in \overline{H}$ なら $0 \leq z \leq 72,$ $0 \leq x,y \leq x+y \leq 72$ だから、$x^2+y^2+z^2 \leq 3 \times 72^2$ となり $\overline{H}$ は有界。よって $\overline{H}$ は有界閉集合である。

関数 V は $\mathbb{R}^3$ で連続であり、$\overline{H}$ が有界閉集合だから V は $\overline{H}$ で最大値を取る。また $(2,2,1) \in H$ であり、$\overline{H} \setminus H$ の点は x,y,z のどれかが 0 となる点である。従って V は H で最大値を取る。$V(2,2,1)=4$ だから $G \setminus H$ 上では V の値はこれ以下。従って V の H での最大値は G での最大値となる。これで冒頭の主張が示せた。

担当教員: 柳田 伸太郎 研究室: A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 5. (1) $f(x,y,z) := x^2+y^2+z^2$, $g(x,y,z) := ax+by+cz-d$ とおく。f は $S=g^{-1}(0)$ でただ一つ極値点 ${}^t(x_o,y_o,z_o) = (\frac{ad}{a^2+b^2+c^2}, \frac{bd}{a^2+b^2+c^2}, \frac{cd}{a^2+b^2+c^2})$ を持ち、そこで最小値 $f(x_o,y_o,z_o) = d^2/(a^2+b^2+c^2)$ を取る。以下でこれを示す。

$g'(x,y,z) = (a,b,c) \neq 0$ に注意する。$\Phi(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$ は

$$2x - a\lambda = 0, \quad 2y - b\lambda = 0, \quad 2z - c\lambda = 0, \quad ax+by+cz = d.$$

の時に微分が 0 となる。この方程式を満たす点は,

$$x = \frac{ad}{a^2+b^2+c^2}, \quad y = \frac{bd}{a^2+b^2+c^2}, \quad z = \frac{cd}{a^2+b^2+c^2}, \quad \lambda = \frac{2d}{a^2+b^2+c^2}.$$

この点を ${}^t(x_o,y_o,z_o)$ とする。f,g は共に $\mathbb{R}^3$ 上で C^1 級である。従って未定乗数法より $g^{-1}(0) = S$ での f の極値点が存在するならば、それは ${}^t(x_o,y_o,z_o)$ 以外に存在しないことが分かる。また直接計算で $D := f(x_o,y_o,z_o) = \frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}$ が分かる。閉区間 $[0,D+1]$ は閉集合で f は連続だから $f^{-1}([0,D+1])$ は閉集合。同様に $S = g^{-1}(0)$ も閉集合。よって $S \cap f^{-1}([0,D+1])$ は閉集合。また $f^{-1}([0,D+1])$ は原点を中心とする半径 $\sqrt{D+1}$ の閉球だから有界。従って $S \cap f^{-1}([0,D+1])$ は有界閉集合であり、関数 f はそこで最大値、最小値を取る。$f(x_o,y_o,z_o) = D$ だから ${}^t(x_o,y_o,z_o) \in S \cap f^{-1}([0,D+1])$ よりここでの f の最小値は D 以下。また f は定義から $S \setminus f^{-1}([0,D+1])$ 上で $D+1$ 以上の値しか取らない。従って f は S 上で最小値を取る。その最小値は S 上での f の極値であるが、極値点は ${}^t(x_o,y_o,z_o)$ のみだからここでの値 D は f の S での最小値を与える。

(2) 関数 x^2+y^2 の曲線 $x^4+y^4+3xy=2$ 上での極値点は $\pm{}^t(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ と $\pm{}^t(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. また $\pm{}^t(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ で最小値 1、$\pm{}^t(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ で最大値 4 を取る。以下でそれを示す。

$f(x,y) := x^2+y^2$, $g(x,y) := x^4+y^4+3xy$ とする。$g'(x,y) = (4x^3+3y, 4y^3+3x)$ より $g'(x,y) = 0 \iff 4x^3+3y = 4y^3+3x = 0$. この方程式の解を求める. 第一式に x, 第二式に y を掛けると $x^4 = y^4$. よって $y^2 = \pm x^2$ である。$x^2 = -y^2$ なら x^2 と y^2 は非負だから $x^2 = y^2 = 0$, つまり $x = y = 0$. $x^2 = y^2$ のとき $y = \pm x$ となる。$y = x$ なら第一式にこれを代入すると $x(4x^2+3) = 0$ となり $x = y = 0$ となる。また $y = -x$ なら第一式に代入して $x(4x^2-3) = 0$. $x = \pm\sqrt{3}/2$, $x = 0$ がこの解である。以上より ${}^t(0,0)$, $\pm{}^t(\sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2)$ で $g' = 0$ となるが、これらの点は $S = g^{-1}(2)$ の点ではない。従って S 上で $g' \neq 0$ である。

次に $\Phi := f(x,y) - \lambda(g(x,y)-2)$ の微分が 0 になるための条件は

$$2x - 4\lambda x^3 - 3\lambda y = 0, \quad 2y - 4\lambda y^3 - 3\lambda x = 0, \quad x^4+y^4+3xy = 2$$

であることに注意し、これを解く。第一式に x, 第二式に y を掛け $2xy$ について解くと $\lambda(x^2-y^2)(4xy-3) = 0$. $4xy = 3$ なら $2 - 3xy = -1/4$ となり第三式を満たさない。また $\lambda = 0$ なら第一、第二式から $x = y = 0$ となりやはり第三式を満たさない。よって $\lambda \neq 0$, $4xy \neq 3$ であり $y^2 = x^2$, つまり $y = \pm x$ となる。また $x = 0$ とすると第一式と $\lambda \neq 0$ より $y = 0$ となるが、これは第三式を満たさない。よって $y = \pm x \neq 0$ である。$y = x$ のときこれを第一式に代入すると $x^2 = (2-3\lambda)/(4\lambda)$. これと $x = y$ を第四式に代入して λ について解くと $\lambda = \pm 2/5$. $\lambda = -2/5$ のときは $x^2 = -2$ なので除外して $\lambda = 2/5$. すると $x = \pm 1/\sqrt{2} = y$. 同様にして $y = -x$ のとき $\lambda = \pm 2/5$ となるが、$\lambda = -2/5$ のときは $x^2 = -1/2$ で不適当であるため $\lambda = 2/5$ となり、このとき $x = -y = \pm\sqrt{2}$ とな

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

る。以上より極値点があるとすればそれは $\pm{}^t(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $\pm{}^t(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ のどれか。更に $f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = 1$, $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4$ となっている。

曲線 $S = g^{-1}(2)$ は有界閉集合である。実際 g が連続だから S は閉集合。また ${}^t(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と極座標表示すると $r^{-4}g(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos^4\theta + \sin^4\theta + 3r^{-2}\cos\theta\sin\theta$. よって $\left|\frac{1}{r^4}g(r\cos\theta, r\sin\theta)\right| \geq \cos^4\theta + \sin^4\theta - |\frac{3}{r^2}\cos\theta\sin\theta| \geq \cos^4\theta + \sin^4\theta - 3/r^2$ となる。ここで $1 = (\cos^2\theta + \cos^2\theta)^2 = \cos^4\theta + \sin^4\theta + \frac{1}{2}\sin^2 2\theta$ に注意すると $\cos^4\theta + \sin^4\theta \geq 1/2$ が分かる。従って $|r^{-4}g(r\cos\theta, r\sin\theta)| \geq 1/2 - 3/r^2$ が得られる。従って $r^2 \geq 12$ なら $|r^{-4}g(r\cos\theta, r\sin\theta)| \geq 1/4$ となるから $|g(x, y)| \geq r^4/4 \geq 12^2/4 > 2$. つまり $x^2 + y^2 \geq 12$ なら $g(x, y) \neq 2$ だから、$S = g^{-1}(2)$ は半径 $\sqrt{12}$ の円周内に含まれ、よって S は有界。有界閉集合 S 上で連続関数 f は最大値と最小値を取る。最大値を与える点は極値点であるため、上記の点のどれかであり、f の値を比較して冒頭の結論を得る。

問題 6. ${}^t(x_o, y_o, z_o) := {}^t(\frac{ad}{a+b+c}, \frac{bd}{a+b+c}, \frac{cd}{a+b+c})$ で最大値 $a^a b^b c^c d^{a+b+c}/(a+b+c)^{a+b+c}$ を取る。以下でこれを示す。$f(x, y, z) := x^a y^b z^c$ とし $g(x, y, z) := x + y + z - d$ とする。$g'(x, y, z) = (1, 1, 1)$ だから $g' \neq 0$ に注意する。

$\Phi := f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$ の微分が消える条件は次のようになる。

$$ax^{a-1}y^b z^c = \lambda, \quad bx^a y^{b-1} z^c = \lambda, \quad cx^a y^b z^{c-1} = \lambda, \quad x + y + z = d.$$

これを条件 $x, y, z > 0$ の下で解く。仮定から $a, b, c, d > 0$ であり、$x, y, z > 0$ という条件を考慮すると最初の三つの式から $\lambda > 0$ が分かり、$x/a = y/b = z/c$ となる。これを第四式に代入して $(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o)$ となる。このとき $\lambda = a^a b^b c^c d^{a+b+c-1}/(a+b+c)^{a+b+c-1}$ である。つまり $g = 0$, $x, y, z > 0$ において f が極値点を持てばそれは点 ${}^t(x_o, y_o, z_o)$ 以外にはない。そこで集合

$$S = \{{}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0,\ g(x, y, z) = 0\}$$

上で関数 f が最大値・最小値を持つことを示す。これが示されると、$x, y, z \geq 0$ で $f \geq 0$ であり、$f = 0$ となるのは x, y, z のうちで 0 となるものがある場合だから $x, y, z > 0$ では最小値をとらず、従って上記の点で最大値をとることになり証明が終わる。

関数 f は $\mathbb{R}^3$ 上で連続だから S が有界閉集合であることを示せば良い。${}^t(x, y, z) \in S$ に対して $d^2 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geq x^2 + y^2 + z^2$ である。特に ${}^t(x, y, z)$ は原点中心の半径 d の閉球に含まれる。つまり S は有界である。また $g^{-1}(0)$ は g が連続だから閉集合であり、$x, y, z \geq 0$ で定義される部分集合も閉集合である。よってこれらの共通部分である S も閉集合となり、S は有界閉集合であることが分かった。

問題 7. 楕円面 $S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ に内接し各辺が軸と平行な直方体の頂点の一つは必ず第一象限 $x, y, z \geq 0$ に頂点を持つ。実際、頂点の一つを ${}^t(x, y, z)$ とすると、楕円に内接するという条件と各辺が軸に平行であるという条件から直方体の 8 つの頂点は ${}^t(x, \pm y, \pm z)$, ${}^t(x, \pm y, \mp z)$, ${}^t(-x, \pm y, \pm z)$, ${}^t(-x, \pm y, \mp z)$ (複合同順) と書き表されるためである。従って特に第一象限の点 ${}^t(x, y, z) \in S$ を指定すれば問題のような直方体が出来るが、この直方体の体積 V は $V(x, y, z) = 8xyz$ である。従って条件 $x, y, z \geq 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ の下での関数 $f(x, y, z) := xyz$ の最大値を求めれば良い。

$g(x,y,z) := \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ とおく。$g'(x,y,z)=(2x/a^2,2y/b^2,2z/c^2)$ なのでこれが消えるのは ${}^t(x,y,z)={}^t(0,0,0)$ の時のみで、S 上では $g'\neq 0$ であることに注意する。未定乗数法を用いるために次の方程式の $x,y,z\geq 0$ を満たす解を求める。

$$yz-\frac{2\lambda x}{a^2}=0,\quad zx-\frac{2\lambda y}{b^2}=0,\quad xy-\frac{2\lambda z}{c^2}=0,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

初めの三式にそれぞれ x,y,z を掛けると $xyz=2\lambda x^2/a^2=2\lambda y^2/b^2=2\lambda z^2/c^2$. 従って $\lambda\neq 0$ なら第四式から $x^2/a^2=y^2/b^2=z^2/c^2=1/3$. $x,y,z\geq 0$ だから $x/a=y/b=z/c=1/\sqrt{3}$ である。このとき $\lambda=\sqrt{3}abc/6$ となる。$\lambda=0$ のときは $xyz=0$ となり、これは関数 $f=xyz$ の与えられた条件のもとでの最小値を与える。楕円 S は有界閉集合であり、第一象限 $x,y,z\geq 0$ は閉集合。従って S と第一象限の共通部分は有界閉集合である。よって f はそこで最大値をとり、点 $(a/\sqrt{3},b/\sqrt{3},c/\sqrt{3})$ がその最大値を与える点となる。この時の直方体の体積は $8abc/3\sqrt{3}$ でありこれが最大値である。

問題 8. 条件で定まる集合 $L=\{{}^t(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y-z-2=-x+y+z-3=0\}$ は直線である。実際、連立方程式 $x+y-z-2=-x+y+z-3=0$ を掃出し法で解くと ${}^t(x,y,z)={}^t(0,5/2,1/2)+s\cdot{}^t(1,0,1)$ $(s\in\mathbb{R})$ が一般解となる。また $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ は原点と点 ${}^t(x,y,z)$ の距離の二乗だから、f の最小値は (存在すれば) 原点と直線 L の距離の二乗ということになる。閉球 $\{{}^t(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)\leq 26/4\}$ は有界閉集合であり、直線 L との交わりは点 $(0,5/2,1/2)$ を含み空でない有界閉集合である。従って f はこの交わりで最小値を持つ。またこの閉球の外では $f(x,y,z)>26/4$ であるため、f の L 上での最小値は存在し、それはこの閉球との交わりのある点で実現される。

写像 $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ を $g(x,y,z):={}^t(x+y-z-2,-x+y+z-3)$ と定義する。$g'(x,y,z)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$ より $\operatorname{rank} g'(x,y,z)=2$ だから未定乗数法が使える。$\Phi(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)-\lambda(x+y-z-2)-\mu(-x+y+z-3)$ の微分が消えるための条件は

$$2x-\lambda+\mu=2y-\lambda-\mu=2z+\lambda-\mu=0,\quad x+y-z=2,\quad -x+y+z=3.$$

ここで最後の二つは冒頭の連立方程式であり、$x=t,\ y=5/2,\ z=t+1/2$ $(t\in\mathbb{R})$ とおける。これを最初の三つの方程式に代入すると

$$\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\\lambda\\\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5\\-1\end{pmatrix}.$$

これを解くと $t=-1/4,\ \lambda=9/4,\ \mu=11/4$ となる。従って ${}^t(x,y,z)=(-1/4,5/2,1/4)$ が f の最小値を与える点であり、最小値は $51/8$ となる。

問題 9. $\mathbb{R}^3$ 内の球面は有界閉集合であるから、それと原点を通る平面 $x+2y+3z=0$ との共通部分 C は有界閉集合である。また点 ${}^t(0,1,0)$ と ${}^t(x,y,z)$ との距離の二乗を $f(x,y,z)$ とすると $f(x,y,z)=x^2+(y-1)^2+z^2=x^2+y^2+z^2-2y+1$. これは連続関数だから C 上で最大値、最小値を取る。

$g_1(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1,\ g_2(x,y,z) := x+2y+3z$ とおく。条件 $g_1 = g_2 = 0$ のもとでの f の最大値と最小値を求める。$g := {}^t(g_1,g_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ とするとその微分は $g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ となり $\mathrm{rank}(g'(x,y,z)) \geq 1$. $\mathrm{rank}(g'(x,y,z)) = 1$ となるのは, $t \in \mathbb{R}$ として ${}^t(x,y,z) = {}^t(t,2t,3t)$ と書き表される時、かつその時に限る。ここで直線 ${}^t(t,2t,3t)$ と平面 $x+2y+3z=0$ との共通部分は原点のみであるが、原点は問題の球面上の点ではなく、従って C 上で $\mathrm{rank}(g'(x,y,z)) = 2$ であることに注意する。また $g_1 = 0$ の条件の下で $f(x,y,z) = 2(1-y)$ である。そこで $\Phi := f - \lambda g_1 - \mu g_2$ とおくと

$$2(1-\lambda)x-\mu = 2(1-\lambda)y-2(1+\mu) = 2(1-\lambda)z-3\mu = x^2+y^2+z^2-1 = x+2y+3z = 0$$

が Φ の微分が消えるための条件である。この方程式を解く。第一式と第三式から $(1-\lambda)(z-3x) = 0$. $\lambda = 1$ のとき第一式から $\mu = 0$ であるが、これらを第二式に代入すると $2 = 0$ となり矛盾する。よって $\lambda \neq 1$ であり $z = 3x$ となる。また第一式、第二式から $2x - y = -(1-\lambda)^{-1}$ となる。さらに第四式に $z = 3x$ を代入して $5x + y = 0$ だから、この二つの式より $x = -1/[7(1-\lambda)],\ y = 5/[7(1-\lambda)]$. これより $\lambda = 1 \pm \sqrt{5/7}$. また $(1-\lambda)x = -1/7$ より $\mu = -2/7$. よって $(x,y,z) = (\pm 1/\sqrt{35}, \mp 5/\sqrt{35}, \pm 3/\sqrt{35})$. つまり極値点があるとするとこの点である。よって $f(1/\sqrt{35}, -5/\sqrt{35}, 3/\sqrt{35}) = 2(1+5/\sqrt{35})$ が最大値、$f(-1/\sqrt{35}, 5/\sqrt{35}, -3/\sqrt{35}) = 2(1-5/\sqrt{35})$ が最小値となる。従って曲線 C と点 ${}^t(0,1,0)$ との距離の最大値は $(2(1+5/\sqrt{35}))^{1/2}$, 最小値は $(2(1-5/\sqrt{35}))^{1/2}$ となる。

問題 10. (1) 示すべきことは次の二つである。任意の自然数 n に対して,

(i) $a_1,\dots,a_n \in I,\ t_1,\dots,t_n \geq 0,\ t_1+\cdots+t_n = 1$ ならば $t_1a_1+\cdots+t_na_n \in I$.

(ii) 上記の時 $f(t_1a_1+\cdots+t_na_n) \leq t_1f(a_1)+\cdots+t_nf(a_n)$.

これらの主張 (i), (ii) を自然数 n についての帰納法で示す。$n = 1,2$ の時は区間の定義より主張 (i) は正しい。また $n=1$ の時は $a_1 \in I,\ t_1 = 1$ に対して $f(t_1a_1) = f(a_1) = t_1f(a_1)$ だから主張 (ii) も正しい。$n=2$ の時は $a_1,a_2 \in I,\ t_1,t_2 \geq 0,\ t_1+t_2 = 1$ に対して $t = 1-t_1 (= t_2)$ とおくと凸関数の定義より以下の不等式が成立するので主張 (ii) は正しい。

$$f(t_1a_1+t_2a_2) = f((1-t)a_1+ta_2) \leq (1-t)f(a_1)+tf(a_2) = t_1f(a_1)+t_2f(a_2).$$

そこで $n = k$ の時に主張 (i), (ii) がともに正しいと仮定する。$n = k+1$ の時 $a_1,\dots,a_{k+1} \in I,\ t_1,\dots,t_{k+1} \geq 0,\ t_1+\cdots+t_{k+1} = 1$ となる実数 $a_1,\dots,a_{k+1},\ t_1,\dots,t_{k+1}$ を取る。もし $t_1 = 1$ なら $t_2 = \cdots = t_{k+1} = 0$ だから主張 (i) は正しい。また $f(t_1a_1+\cdots+t_{k+1}a_{k+1}) = f(a_1) = t_1f(a_1)+t_2f(a_2)+\cdots+t_{k+1}f(a_{k+1})$ となって主張 (ii) も正しい。そこで $t_1 \neq 1$ と仮定し $t = 1-t_1$ とおく。この時 $0 \leq t_j\ (j = 1,\dots,k+1),\ t_1+t_2+\cdots+t_{k+1} = 1$ だから $t_1 < 1$ で $0 < t = t_2+\cdots+t_{k+1} \leq 1$ となる。従って $s_j := t_j/(1-t_1) = t_j/t\ (j = 2,\dots,k+1)$ とおくと $s_j \geq 0\ (j = 2,\dots,k+1)$ かつ $s_2+\cdots+s_{k+1} = 1$. そこで $b := s_2a_2+\cdots+s_{k+1}a_{k+1}$ とおくと帰納法の仮定の (i) より $b \in I$ であり、さらに帰納法の仮定の (ii) より $f(b) \leq s_2f(a_2)+\cdots+s_{k+1}f(a_{k+1})$. また $t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_{k+1}a_{k+1} = (1-t)a_1+tb$ だから凸関数の定義により

$$\begin{aligned} &f(t_1a_1+\cdots+t_{k+1}a_{k+1}) = f((1-t)a_1+tb) \leq (1-t)f(a_1)+tf(b) \\ &\leq (1-t)f(a_1)+t(s_2f(a_2)+\cdots+s_{k+1}f(a_{k+1})) = t_1f(a_1)+t_2f(a_2)+\cdots+t_{k+1}f(a_{k+1}) \end{aligned}$$

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

となり主張 (ii) も正しい。

(2) まず $x>0$ の時 $f'(x)=\log x+1,\ f''(x)=1/x>0$ に注意する。また $f(0)=0$ と定義したので $f(x)=x\log x$ は $[0,\infty)$ 上の連続関数である。また $x,y>0$ の時

$$
\begin{aligned}
f(y)-f(x) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}f((1-t)x+ty)\,dt = (y-x)\int_0^1 f'((1-t)x+ty)\,dt \\
&= (y-x)f'(x)+(y-x)^2\int_0^1 (1-t)f''((1-t)x+ty)\,dt.
\end{aligned}
$$

しかし $(0,\infty)$ 上で $f''>0$ だから、$x,y>0$ の時 $f(y)-f(x)-(y-x)f'(x)>0$ である。

$x,y\in[0,\infty)$ を固定し $t\in[0,1]$ に対して

$$
\phi(t) := f((1-t)x+ty)-(1-t)f(x)-tf(y)
$$

とおく。$\phi(t)\le 0$ が任意の $t\in[0,1]$ に対して成り立つことを示せばよい。$\phi(0)=\phi(1)=0$ に注意する。$x=0$ の時 $\phi(t)=f(ty)-tf(y)=yt\log t$ となるが $0\le t\le 1$ より $\phi(t)\le 0$ である。$y=0$ の時も $\phi(t)=x(1-t)\log(1-t)$ と $0\le 1-t\le 1$ より $\phi(t)\le 0$. 従って $x,y\in(0,\infty)$ と仮定して良い。$x=y$ の時は $\phi(t)=0$ だから $x\ne y$ と仮定して良く、更に $y<x$ の時は x,y を入れ替えれば良いので、$x<y$ と仮定して良い。この時 $\phi(t)$ は $[0,1]$ 上の C^2 級関数であり $\phi'(t)=(y-x)f'((1-t)x+ty)-(f(y)-f(x)),\ \phi''(t)=(y-x)^2f''((1-t)x+ty))$ となっている。特に $\phi''(t)>0$. よって $\phi'(t)$ は t について狭義単調増加関数。また $\phi'(0)=(y-x)f'(x)-(f(y)-f(x))<0,\ \phi'(1)=(y-x)f'(y)-(f(y)-f(x))>0$ だから、中間値の定理を ϕ' に適用して $\phi'(t)=0$ となる t はただ一つ存在することが分かる。それを t_o とすると $0<t_o<1$ であって $t>t_o$ なら $\phi'(t)>0$, $t<t_o$ なら $\phi'(t)<0$ である。また

$$
\phi(t)=\phi(t_o)+(t-t_o)^2\int_0^1 (1-s)\phi''(t_o+s(t-t_o))\,ds
$$

だから $\phi(t)\ge\phi(t_o)$ であり、$\phi(t_o)$ は $\phi(t)$ の $[0,1]$ における最小値を与える。$[0,1]$ は有界閉区間だから、連続関数 ϕ には最大値がある。$(0,1)$ で最大値を取ればそこでの微分が消えるが、ϕ の微分が消えるのは t_o のみだから最大値は $t=0,1$ で取る。よって ϕ の $[0,1]$ での最大値は $\phi(0)=\phi(1)=0$. 以上より $\phi(t)\le 0$ が任意の $t\in[0,1]$ に対して成り立つ。

(3) 定義から ${}^t(x_1,\dots x_n)\in\mathbb{R}^n,\ x_i\ge 0\ (i=1,\dots,n)$ の時 $-H(x)=\sum_{i=1}^n f(x_i)$. (2) より f は $[0,\infty)$ 上の凸関数であり、(1) より ${}^t(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ x_1+\cdots+x_n=1$ に対して

$$
-\frac{1}{n}H(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n\frac{f(x_i)}{n}\ge f((x_1+\cdots+x_n)/n)=f(1/n)=-\frac{1}{n}\log n.
$$

(ここで設問 (1) の主張を $t_j=1/n,\ a_j=x_j\ (j=1,\dots,n)$ として用いた。) 従って $x={}^t(x_1,\dots,x_n),\ x_i\ge 1\ (i=1,\dots,n),\ x_1+\cdots+x_n=1$ に対して $H(x)\le\log n$ となる。また $H(1/n,\dots,1/n)=\log n$ だから関数 $H(x)$ は点 ${}^t(1/n,\dots,1/n)$ で最大値 $\log n$ を取る。

なお最大値を取る点はこの点以外存在しない。実際この問題を条件付き極値問題として考えると、まず $x_i\ge 0\ (i=1,\dots,n),\ x_1+\cdots+x_n=1$ で定まる集合 S は閉集合であり、更に $|x|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2\le n$ で定まる閉球内に含まれるから有界。つまり S は有界閉集合だから H はそこで最大値と最小値を取る。更に $x={}^t(x_1,\dots,x_n)\in S$ なら $f(x_i)\le 0$ だ

から $H(x) \geq 0$ であり、等号成立は $f(x_i) = 0$ が任意の i について成り立つ時、かつその時に限る。これは $x_i = 0$ または $x_i = 1$ の時、かつその時にのみ成り立つ。従って H は S の境界で最小値を取る。よって H の S 上での最大値を与える点は極値点である。さらに未定乗数法を用いるために $\Phi := H - \lambda(x_1 + \cdots + x_n - 1)$ とおくと $\frac{\partial H}{\partial x_i} = -(\log x_i + 1 + \lambda)$ より極値点 ${}^t(x_1, \ldots, x_n) \in S$ は以下を満たす。

$$\textstyle\sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad \lambda + 1 + \log x_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

($g(x) := x_1 + \cdots + x_n - 1$ に対して $g' = (1, \ldots, 1) \neq 0$ に注意。) 従って $\lambda = -1 + \log n$, $x_i = 1/n$ となるから H の S 上で $x_i > 0$ となる極値点は ${}^t(1/n, \ldots, 1/n)$ のみ。

以下の問題 11, 12, 13 では $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合、f, g を U 上で定義された C^1 級の実数値関数とし $c \in \mathbb{R}$ は $S := g^{-1}(c)$ が曲面となるものとする。

問題 11. $a \in S$ とする．仮定から $\nabla g(a) \neq 0$ である。適当に座標の番号を付け替えて $\frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \neq 0$ と仮定してよい。$a = {}^t(a', a_n)$, $a' = {}^t(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ とおく。このとき陰関数定理より、a' を含む $\mathbb{R}^{n-1}$ での開集合 V と a_n を含むある開区間 I, そして V 上の C^1 級関数 $h = h(x')$ が存在して、任意の $x = {}^t(x', x_n) \in V \times I$, $x' = {}^t(x_1, \ldots, x_{n-1})$ に対して $g(x', x_n) = c \iff x_n = h(x')$ であり $h(a') = a_n$ が成り立つ。特に任意の $x' \in V$ に対して $(x', h(x')) \in S$ である。

$0 \neq u \in \mathbb{R}^n$ を $\langle u, \nabla g(a) \rangle = 0$ となるものとする。$u = {}^t(u', u_n)$, $u' = {}^t(u_1, \ldots, u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ とすると $\sum_{i=1}^{n-1} u_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) + u_n \frac{\partial g}{\partial x_n}(a) = 0$. V, I はそれぞれ $\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}$ 内の開集合だから、$\varepsilon > 0$ を十分小さくとれば $-\varepsilon < t < \varepsilon$ を満たす任意の t に対して $a + tu = {}^t(a' + tu', a_n + tu_n) \in V \times I$ となる。このとき ${}^t(a' + tu', h(a' + tu')) \in S$ である。そこで $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ を $c(t) = {}^t(a' + tu', h(a' + tu'))$ とおく。$c(0) = {}^t(a', h(a')) = {}^t(a', a_n) = a$ である。また $g(x', h(x')) = c$ を $x' = {}^t(x_1, \ldots, x_{n-1})$ で微分すると $\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \frac{\partial h}{\partial x_i}(a') = 0$. 仮定から $\frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \neq 0$ だから $\frac{\partial h}{\partial x_i}(a') = -\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) \frac{\partial g}{\partial x_n}(a)^{-1}$. よって $c'(0) = {}^t(u', \langle \nabla h(a'), u' \rangle)$ となるが、$\langle \nabla h(a'), u' \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} u_i \frac{\partial h}{\partial x_i} = u_n$ だから $c'(0) = u$ となる。よってこの $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ が求める曲線である。

問題 12. $a \in S$ が f の S 上での極値点だと仮定する。また $u \in \mathbb{R}^n$ を $\nabla g(a)$ と直交するベクトル、つまり $\langle \nabla g(a), u \rangle = 0$ を満たすベクトルとする。このとき問題 11 より曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ で $c(0) = a$, $c'(0) = u$ となるものが存在する。ここで関数 $\phi(t) = f(c(t))$ を考える。$a = c(0)$ が f の極値点だから、関数は $\varepsilon > 0$ が十分小さいとき ϕ は $t = 0$ で最大値または最小値を取る。いずれにしても $\phi'(0) = 0$. よってプリント Y009 問題 8 とその解答より $0 = \phi'(0) = \langle \nabla f(a), u \rangle$ となる。

問題 13. 問題 11, 12 の設定で分かることは、ベクトル $\nabla f(a)$ は $\nabla g(a)$ と直交する任意のベクトルと直交する、ということである。今は $\nabla g(a) \neq 0$ だから、$\nabla g(a)$ と直交するベクトル全体の集合は $\mathbb{R}^n$ の $n-1$ 次元部分空間となる。この $n-1$ 次元部分空間の基底 $u_1, \ldots, u_{n-1}$ を取ると $u_1, \ldots, u_{n-1}, \nabla g(a)$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である。そこで $\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i + \lambda^o \nabla g(a)$ $(\lambda_i, \lambda^o \in \mathbb{R})$ とおける。任意の $j = 1, \ldots, n-1$ に対して $\langle \nabla g(a), u_j \rangle = 0$ であり、問題 12 より $\langle \nabla f(a), u_j \rangle = 0$ だから $0 = \langle \nabla f(a), u_j \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle u_i, u_j \rangle \lambda_i$ となる。ところが

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

$u_1, \dots, u_{n-1}$ が一次独立だから $n-1$ 次行列 $(\langle u_i, u_j \rangle)$ は正則行列であり、従って $\lambda_i = 0$ $(i = 1, \dots, n-1)$ が成り立つ。従って $\nabla f(a) = \lambda^o \nabla g(a)$ となる。

問題 14. (1) $l = 0, 1, \dots$ に対して $I_l = \int_0^\infty e^{-t} t^l \, dt$ とおく。$I_0 = 1$ であり、部分積分によって $l \geq 1$ に対して $I_l = l I_{l-1}$ が成り立つ。よって $I_l = l!$ である。

(2) $x = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ に対して $q(x,t) = \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}$ とおく。$q(x,t)$ は t について高々$n-1$ 次の実係数多項式であり、$q(x,t)^2 = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j t^{i+j-2}$ となる。従って

$$J(x) = \int_0^\infty e^{-t} q(x,t) \, dt = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \int_0^\infty e^{-t} t^{i+j-2} \, dt = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j (i+j-2)!$$

となる。そこで n 次実行列 A を $A = ((i+j-2)!)$ とする。つまり A は (i,j) 成分が $(i+j-2)!$ であるような行列である。A は対称行列であり、直接計算で $J(x) = \langle Ax, x \rangle$ が任意の $x = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して成り立つ。ここで $J(x)$ の定義から任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\langle Ax, x \rangle = J(x) \geq 0$. また $J(x) = 0$ と仮定すると、$J(x)$ の非積分関数 $e^{-t} q(x,t)^2$ が非負の連続関数だから、任意の t について $e^{-t} q(x,t) = 0$, つまり $q(x,t) = 0$ となる。このとき $q(x,t)$ の t^{i-1} $(i = 1, \dots, n)$ の係数は全て 0 でなくてはならず、従って $x = 0$ となる。つまり $\langle Ax, x \rangle = 0 \iff x = 0$ が分かる。よって A の固有値はすべて正である。

補足 2. ヒントの証明をつけておく。まず A は実対称行列だから A の固有値は全て実数であることに注意する。実際 λ が A の固有値なら $Az = \lambda z$ となる $0 \neq z \in \mathbb{C}^n$ が存在する。$\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\mathbb{C}^n$ の標準的な Hermite 内積、つまり $u = {}^t(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n$, $v = {}^t(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}$ とすると、$\langle Az, z \rangle = \lambda \langle z, z \rangle$. 一方 A が対称な実行列であるということから $\overline{\lambda} \langle z, z \rangle = \overline{\langle Az, z \rangle} = \langle z, Az \rangle = \langle Az, z \rangle$. よって $(\lambda - \overline{\lambda}) \langle z, z \rangle = 0$. $z \neq 0$ だから $|z|^2 = \langle z, z \rangle \neq 0$ より $\lambda = \overline{\lambda}$ で λ は実数。またこのような実数の固有値 λ に対する固有ベクトル u は $u \in \mathbb{R}^n$ と取れる ($(A - \lambda E)u = 0$ は実係数の連立方程式なので)。

さて A を上記のような性質を満たす n 次実対称行列であるとし、$\lambda \in \mathbb{R}$ を A の固有値、$u \in \mathbb{R}^n$ を λ に対する固有ベクトルとする。このとき $0 \leq \langle Au, u \rangle = \lambda \langle u, u \rangle$ で $\langle u, u \rangle > 0$ だから $0 \leq \lambda$. また $x \in \mathbb{R}^n$ が $Ax = 0$ を満たすなら $\langle Ax, x \rangle = 0$ より $x = 0$. つまり 0 は A の固有値ではない。以上より A の固有値は全て正であることが分かった。

(3) $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $I(x) = \int_0^\infty e^{-t} (q(x,t) + t^n)^2 \, dt$ であった。非積分関数 $(q(x,t) + t^n)^2$ を展開して計算すると、設問 (2) より

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^\infty e^{-t} q(x,t)^2 \, dt + 2 \int_0^\infty e^{-t} t^n q(x,t) \, dt + \int_0^\infty e^{-t} t^{2n} \, dt \\ &= \langle Ax, x \rangle + 2 \int_0^\infty e^{-t} t^n q(x,t) \, dt + (2n)!. \end{aligned}$$

ここで $q(x,t) = \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}$ を代入して第二項の積分を計算すると

$$\int_0^\infty e^{-t} t^n q(x,t) \, dt = \sum_{i=1}^n (n+i-1)! x_i.$$

よって $a := {}^t(n!, (n+1)!, \dots, (2n-1)!) \in \mathbb{R}^n$, $c := (2n)! \in \mathbb{R}$ とおけば $I(x) = \langle Ax, x \rangle + 2 \langle x, a \rangle + c$ となる。

担当教員: 柳田 伸太郎 研究室: A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

(4) $\mathbb{R}^n$ 上の関数 I の極値点は存在すればそこで I の偏微分は全て消える。直接計算することにより $\frac{\partial I}{\partial x_j}(x) = 2\sum_{i=1}^{n}(i+j-2)!x_i + 2(n+j-1)!$. これは $2Ax+2a$ の第 j 成分である。よって $\frac{\partial I}{\partial x_j}(x) = 0$ $(j=1,\ldots,n)$ となる点 $x = {}^t(x_1,\ldots,x_n)$ は $2Ax+2a=0$ を満たす。いま A の固有値は全て正であるから正則である。よって $I(x)$ が極値点を持つのは $x^o = -A^{-1}a$ のみである。また直接計算で $I(x) = \langle A(x-x^o),(x-x^o)\rangle + c - \langle A^{-1}a, a\rangle$ が分かる。$\langle A(x-x^o),(x-x^o)\rangle \geq 0$ だから $I(x) \geq c - \langle A^{-1}a, a\rangle$ であり、設問 (2) より等号成立は $x = x^o$ のとき、かつそのときのみ成り立つ。従って $I(x)$ は $x = x^o = -A^{-1}a$ で最小値 $I(x^o) = c - \langle A^{-1}a, a\rangle$ を取る。

(5) 設問 (4) の解答により $\frac{\partial I}{\partial x_j}(x) = 0$ $(j=1,\ldots,n)$ $\iff$ $x = x^o$. また $\frac{\partial I}{\partial x_j}(x) = 2\sum_{i=1}^{n}(i+j-2)!x_i + 2(n+j-1)!$ であった。設問 (1) によって

$$\frac{\partial I}{\partial x_j} = 2\left[\int_0^\infty e^{-t}t^{j-1}q(x,t)\,dt + \int_0^\infty e^{-t}t^{j-1}t^n\,dt\right] = 2\int_0^\infty e^{-t}p(x,t)t^{j-1}\,dt$$

が任意の $j=1,\ldots,n$ に対して成り立つ。従って上記の最後の積分が任意の $j=1,\ldots,n$ に対して 0 になるのは $x = x^o$ の時かつその時のみである。

(6) 一般に二つの 1 変数関数 $f(t), g(t)$ と自然数 n に対して

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^k f}{dt^k}\frac{d^{n-k}g}{dt^{n-k}}$$

が成り立つ (証明は補足 3 で行う)。これを $f(t) = e^{-t}$, $g(t) = t^n$ に用いると

$$\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^k}{dt^k}(e^{-t})\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}(t^n).$$

ここで $\frac{d^k}{dt^k}(e^{-t}) = (-1)^k e^{-t}$, $\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}(t^n) = \frac{n!}{k!}t^k$ だから

$$e^t\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n) = e^t\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k e^{-t}\frac{n!}{k!}t^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(n!)^2}{k!(n-k)!}\frac{t^k}{k!}$$

となり、これは t についての n 次実係数多項式である。また t^n の係数は $(-1)^n$ だから $p(t) := (-1)^n e^t\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n)$ は t についての n 次実係数多項式で t^n の係数は 1. 設問 (5) より $p(t) = q(x^o,t) + t^n$ を示すには $\int_0^\infty e^{-t}p(t)t^{j-1}\,dt = 0$ が $j=1,\ldots,n$ に対して成り立つことを確かめれば良い。自然数 n と $j,k = 1,\ldots,n$, $j \leq k$ に対して

$$K_n(j,k) := (-1)^k\int_0^\infty t^{j-1}\frac{d^k}{dt^k}(e^{-t}t^n)\,dt$$

とおく。このとき $\int_0^\infty e^{-t}p(t)t^{j-1}\,dt = K_n(j,n)$. $n \geq 1$, $1 \leq k \leq n$ のとき

$$\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{-t}t^n) = \sum_{l=0}^{k-1}\binom{k-1}{l}(-1)^l e^{-t}\frac{n!}{(n-k+l+1)!}t^{n-k+l+1}$$

であり $1 \leq k \leq n$, $0 \leq l \leq k-1$ に対して $n-k+l+1 \geq 1$ だから

$$K_n(1,k) = (-1)^k\left[\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{-t}t^n)\right]_{t=0}^{t\to\infty} = 0.$$

また $2 \le j \le k \le n$ に対して同様にして

$$K_n(j,k) = (-1)^k \left\{ \left[t^{j-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{-t}t^n) \right]_{t=0}^{t\to\infty} - (j-1) \int_0^\infty t^{j-2} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{-t}t^n)\,dt \right\}$$
$$= (j-1) K_n(j-1,k-1).$$

従って $K_n(j,k) = (j-1)! K_n(1,k-j+1)$ が $2 \le j \le k \le n$ に対して成り立つ。$2 \le j \le k \le n$ のとき $1 \le k-j+1 \le n$ だから $K_n(j,k) = 0$ となる。従って任意の $1 \le j \le k \le n$ に対して $K_n(j,k) = 0$ となり、特に $K_n(j,n) = 0$. つまり $p(t) = (-1)^n e^t \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n)$ に対して設問 (5) の等式が $j = 1, \ldots, n$ で成立する。よって $p(t) = p(x^o, t)$ である。

補足 3. 公式

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k f}{dt^k} \frac{d^{n-k} g}{dt^{n-k}}$$

は n についての帰納法で証明できる。まず $n=1$ の時この式は Leipnitz 則 $(fg)' = f'g + fg'$ に他ならない。また $n = l$ の時に正しいとすると、$n = l+1$ のとき帰納法の仮定から

$$\begin{aligned}
\frac{d^{l+1}}{dt^{l+1}}(f(t)g(t)) &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \frac{d^k f}{dt^k} \frac{d^{l-k} g}{dt^{l-k}} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \frac{d^{k+1} f}{dt^{k+1}} \frac{d^{l-k} g}{dt^{l-k}} + \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \frac{d^k f}{dt^k} \frac{d^{l-k+1} g}{dt^{l-k+1}} \\
&= \sum_{m=1}^{l+1} \binom{l}{m-1} \frac{d^m f}{dt^m} \frac{d^{l+1-m} g}{dt^{l+1-m}} + \sum_{m=0}^{l} \binom{l}{m} \frac{d^m f}{dt^m} \frac{d^{l+1-m} g}{dt^{l+1-m}} \\
&= f(t) \frac{d^{l+1} g}{dt^{l+1}} + \sum_{m=1}^{l} \left[\binom{l}{m-1} + \binom{l}{m} \right] \frac{d^m f}{dt^m} \frac{d^{l+1-m} g}{dt^{l+1-m}} + \frac{d^{l+1} f}{dt^{l+1}} g(t)
\end{aligned}$$

となるが、$1 \le m \le l$ に対して

$$\binom{l}{m-1} + \binom{l}{m} = \binom{l+1}{m}$$

だから証明したい式が得られる。