担当教員: 柳田 伸太郎 研究室: A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

小テスト (12/22) 解答

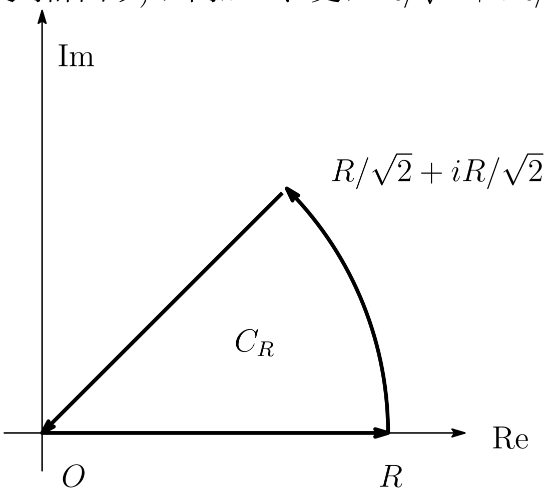
作成日: 12/17/2016 更新日: 12/26/2016 Version: 1.0 配布日: 12/22/2016

学生番号 ____________ 名前 ____________

問題 1. 積分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$ は既知として、以下の等式を複素積分 $\int_{C_R} e^{-z^2}dz$ を用いて示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

但し R を正の実数として C_R は下図のような閉曲線である：複素平面の原点 O から R へ実軸上に向かい、その後 R から $R/\sqrt{2}+iR/\sqrt{2}$ へ原点中心で半径 R の円周上を正の向き (反時計回り) に向かい、更に $R/\sqrt{2}+iR/\sqrt{2}$ から O へ直線上に進んでできる閉曲線。



解答.
e^{-z^2} は C_R が囲む領域で正則だから $\int_{C_R} e^{-z^2}dz = 0$. 一方 $\int_{C_R}$ を順に I_1, I_2, I_3 と分解すると

$$I_1 = \int_0^R e^{-x^2}dx, \quad I_2 = \int_0^{\pi/4} e^{-R^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)}d\theta, \quad I_3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_R^0 e^{-it^2}dt.$$

合わせると $0 = I_1 + I_2 + I_3$. また $\lim_{R\to\infty} I_1 = \sqrt{\pi}/2$ 及び

$$I_3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^R \left(\cos t^2 - i\sin t^2\right)dt \xrightarrow{R\to\infty} -\frac{1+i}{2\sqrt{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cos x^2 dx - i\int_{-\infty}^{\infty}\sin x^2 dx\right)$$

が分かるので、あとは $I_2 \to 0$ $(R \to 0)$ が言えれば求めたい式が得られる。これは

$$|I_2| \le \int_0^{\pi/4} e^{-R^2\cos 2\theta}d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\sin u}du \le \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-2R^2u/\pi}du \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

から分かる。但し等号では $2\theta = \pi/2 - u$ と変数変換し、また 2 つ目の不等号では $\sin u > 2u/\pi$ を用いた。
10 点満点で採点しました。$\int_{C_R} e^{-z^2}dz = 0$ が正しく導けていれば 3 点、I_3 について正しく議論していれば 3 点、I_2 について正しく議論していれば 4 点つけています。平均点は 3.6 点でした。