担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

解答 (多変数関数の微積分)

作成日: 11/20/2016　更新日: 12/18/2016　Version: 0.6

問題 1. (1) $(x,y) \neq (0,0)$ のとき

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

また $(x,y)=(0,0)$ のときも偏微分は存在し $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ となる。
(2) 任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sqrt{|y|}$. 任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$. $x \neq 0$ のとき $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ は存在しない。$y > 0$, $x \neq 0$ のとき $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x/(2\sqrt{y})$. $y < 0$, $x \neq 0$ のとき $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x/(2\sqrt{|y|})$.
(3) $(x,y) \neq (0,0)$ のとき

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

また $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ は存在しない。$f(0,\varepsilon)=0$ だから $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ である。
(4) $x>0$, $y \neq 0$ のとき $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{|y/x|}$. $x<0$, $y \neq 0$ のとき $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{2}\sqrt{|y/x|}$. $x \in \mathbb{R}$ に対して $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$. また $y>0$, $x \neq 0$ のとき $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{|x/y|}$. $y<0$, $x \neq 0$ のとき $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{2}\sqrt{|x/y|}$. $y \in \mathbb{R}$ に対して $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ は存在しない。

問題 2. (1) $(x,y) \neq (0,0)$ のときは

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy\sin x + x^2y\cos x}{x^2+y^2} - \frac{2x^3y\sin x}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2\sin x}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y^2\sin x}{(x^2+y^2)^2}.$$

また $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
(2) $f_x := \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $f_y := \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ とおく。設問 (1) より $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. また $0 \neq \varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して $f_x(0,\varepsilon) = 0$, $f_y(\varepsilon,0) = \sin\varepsilon$ だから $\frac{\partial f_x}{\partial y}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f_y}{\partial x}(0,0) = 1$ となりこれらの値は異なる。

問題 3. 任意の $x,h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ に対して $f(x+h)-f(x) = Ah$ となる。従って $\frac{f(x+h)-f(x)-Ah}{|h|} = 0$ だから $f'(x) = A$ である。

問題 4. f が a で微分可能だから a での方向微分も存在することに注意。$0 \neq \varepsilon \in \mathbb{R}$ として

$$|D_u f(a) - f'(a)u| = \left| D_u f(a) - \frac{f(a+\varepsilon u)-f(a)}{\varepsilon} \right| + \left| |u| \frac{f(a+\varepsilon u)-f(a)-f'(a)(\varepsilon u)}{\varepsilon |u|} \right|.$$

初項は方向微分の定義から $\varepsilon \to 0$ のとき 0 に収束し、第二項は $h := \varepsilon u$ とおけば $\varepsilon \to 0$ のとき $|h| \to 0$ だから、微分の定義から 0 に収束する。左辺は ε に依らないので $D_u f(a) = f'(a)u$.

問題 5. (1) $u=(a,b) \neq 0$ とすると $0 \neq t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\frac{f(tu)}{t} = \frac{ab^2}{a^2+t^2b^2\cos^2(ta)} + \frac{b\sin(t^2ab)}{t^2(a^2+t^2b^2\cos^2(ta))}.$$

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

ここで $\sin(t^2ab)/t^2 \to ab$ $(t \to 0)$ に注意し上式で $t \to 0$ とすると

$$D_u f(0,0) = 2b^2/a \ (a \neq 0), \quad D_u f(0,0) = 0 \ (a = 0).$$

(2) $\varepsilon > 0$ として

$$f(\varepsilon, \varepsilon^{1/2}) = \frac{1}{1+\cos^2(\varepsilon^{1/2})} + \frac{\varepsilon^{1/2}\sin(\varepsilon^{3/2})}{\varepsilon^2(1+\cos^2(\varepsilon^{1/2}))}.$$

第一項は $\varepsilon \to 0$ のとき $1/2$ に収束する。また

$$\frac{\varepsilon^{1/2}\sin(\varepsilon^{3/2})}{\varepsilon^2} = \frac{\sin(\varepsilon^{3/2})}{\varepsilon^{3/2}} \to 1, \quad (\varepsilon \to 0)$$

だから第二項も $1/2$ に収束する。つまり $\lim_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon, \varepsilon^{1/2}) = 1$. ところが定義から $f(0,0) = 0$ だから f は原点で連続ではない。よって原点で微分可能でない。

問題 6. (1) 原点で微分可能でない. 実際 $0 \neq t \in \mathbb{R}$ に対して $f(t,0) = 0$, $f(t,t) = 1/2$ だから $\lim_{t\to 0} f(t,0) = 0 \neq 1/2 = \lim_{t\to 0} f(t,t)$ となり f は原点で連続でない。
(2) 原点で微分可能である. 実際 $h = (x,y) \neq (0,0)$ とすると

$$|x\sqrt{|y|}| \leq (x^2+y^2)^{1/2}(x^2+y^2)^{1/4} = (x^2+y^2)^{3/4}$$

だから、$|h| = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$ のとき

$$\left|\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \left|\frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq (x^2+y^2)^{1/4} \to 0.$$

つまり $f'(0,0) = (0,0)$ である.
(3) 原点で微分可能でない. 実際、問題 1(3) より $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ は存在しない。
(4) 原点で微分可能でない. 実際、もし微分可能なら問題 1(4) の解答から $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ だから $f'(0,0) = (0,0)$ でなくてはならない。ところが $h = (x,y) \neq (0,0)$ に対して $[f(x,y) - f(0,0)]/\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{|xy|/(x^2+y^2)}$ となる。特に $y = x$ として $[f(x,x) - f(0,0)]/\sqrt{2x^2} = 1/\sqrt{2}$ となり、これは $x \to 0$ のとき 0 に収束しない。

問題 7. (1)

$$\frac{\partial g\circ f}{\partial x}(x,y) = g'(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial g\circ f}{\partial y}(x,y) = g'(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

特に

$$(g\circ f)'(x,y) = \left(g'(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), g'(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right).$$

(2) $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ とすると $g\circ f(t) = g(f_1(t), f_2(t))$ だから

$$(g\circ f)'(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(f_1(t), f_2(t))f_1'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(f_1(t), f_2(t))f_2'(t).$$

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 8. $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(c(t)) = D_u f(a)$ である。実際 $u = {}^t(u_1,\dots,u_n)$, $c(t) = {}^t(c_1(t),\dots,c_n(t))$ とすると連鎖律から $\frac{d}{dt} f(c(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(c(t)) c_i'(t)$. $t=0$ とすると $c(0)=a$, $c_i'(0)=u_i$ よりこの右辺は $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) u_i$ となる。一方 $D_u f(a) = f'(a) u$ であり右辺は $1\times n$ 行列 (ベクトル) $f'(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$ と $n\times 1$ 行列 (ベクトル)u との積だから、$D_u f(a) = f'(a)u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) u_i$ となる。

問題 9. (1) $\nabla f(x) = {}^t f'(x)$ なので問題 8 の解答と同様に $\langle \nabla f(x), u\rangle = f'(x)u = D_u f(x)$.
(2) 設問 (1) と Cauchy-Schwarz の不等式より、$|u|=1$ のとき

$$|D_u f(x)| = |\langle \nabla f(x), u\rangle| \le |\nabla f(x)|\,|u| = |\nabla f(x)|.$$

従って $\max_{u\in\mathbb{R}^n | |u|=1} D_u f(x) \le |\nabla f(x)|$. また $\nabla f(x) \ne 0$ だから $u := \nabla f(x)/|\nabla f(x)|$ とおくと $|u|=1$ であり、$D_u f(x) = \langle \nabla f(x), u\rangle = |\nabla f(x)|$ となるから $\max_{u\in\mathbb{R}^n\,;\,|u|=1} D_u f(x) = |\nabla f(x)|$. 最大値を与える u として、この計算から $u = \nabla f(x)/|\nabla f(x)|$ を取ることが出来る。

問題 10. まず問題の設定から

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

が成り立つこ。これから直接計算で (1) が分かる。また

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

より (2) が分かる。

問題 11. $\frac{\partial f}{\partial t} = -c\phi'(x-ct) + c\psi'(x+ct)$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \phi'(x-ct) + \psi'(x+ct)$ となるので

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\phi''(x-ct) + c^2\psi''(x+ct) = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

逆に関数 f が $\frac{\partial^2 f}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を満たすと仮定する。$u := x-ct$, $v := x+ct$ とおくと $x = (u+v)/2$, $t = (v-u)/2c$ となる。$g(u,v) := f((v-u)/2c, (u+v)/2)$ とおくと

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial g}{\partial v} = -\frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}.$$

従って

$$4\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

つまり $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)$ は v について定数だから $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,0)$. また

$$g(u,v) = g(0,v) + \int_0^u \frac{\partial g}{\partial u}(s,v)\,ds = g(0,v) + \int_0^u \frac{\partial g}{\partial u}(s,0)\,ds$$

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

となるので、$\phi(u) := \int_0^u \frac{\partial g}{\partial u}(s,0)\,ds$, $\psi(v) := g(0,v)$ とおくと $g(u,v) = \phi(u) + \phi(v)$ であり、$u = x - ct$, $v = x + ct$ を代入して $f(t,x) = \phi(x-ct) + \psi(x+ct)$ を得る。

問題 12.

$$f(x) := \sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 P_j(tx)\,dt \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

とおく。これが $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = P_i(x)$ を満たせば、仮定から $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$ であり P_i は C^1 級だからこれは連続。つまり f は C^2 級となる。

そこで $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = P_i(x)$ $(i = 1,\dots,n)$ を示す。直接微分すると、P_i が C^1 級で積分区間が有界閉区間だから積分と $\frac{\partial}{\partial x_i}$ の順序交換が可能で

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \int_0^1 P_i(tx)\,dt + \sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i}(P_j(tx))\,dt$$

となるが、仮定から $\frac{\partial}{\partial x_i}(P_j(tx)) = t\frac{\partial P_j}{\partial x_i}(tx) = t\frac{\partial P_i}{\partial x_j}(tx)$. 従って

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \int_0^1 P_i(tx)\,dt + \sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 t\frac{\partial P_i}{\partial x_j}(tx)\,dt.$$

ここで $\sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial P_i}{\partial x_j}(tx) = \frac{d}{dt}(P_i(tx))$ に注意すると、第二項の積分は

$$\sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 t\frac{\partial P_i}{\partial x_j}(tx)\,dt = \int_0^1 t\frac{d}{dt}(P_i(tx))\,dt = [tP_i(tx)]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 P_i(tx)\,dt = P_i(x) - \int_0^1 P_i(tx)\,dt$$

となるから $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = P_i(x)$.

問題 13. $f(t) := \Phi(x(t)) + \frac{m}{2}|x'(t)|^2$ とおく。Φ が C^1 級、$x(t)$ が C^2 級だから $f(t)$ は $t \in \mathbb{R}$ の関数として C^1 級である。また $x(t) = {}^t(x_1(t),\dots,x_n(t))$ と成分表示すると $|x'(t)|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i'(t))^2$ だから

$$\frac{d}{dt}|x'(t)|^2 = 2\sum_{i=1}^n x_i'(t)x_i''(t) = 2\langle\, x'(t), x''(t)\,\rangle.$$

また問題 8, 9 と問題の仮定 $\nabla\Phi(x(t)) = -mx''(t)$ から

$$\frac{d}{dt}\Phi(x(t)) = \langle\, \nabla\Phi(x(t)), x'(t)\,\rangle = -m\langle\, x''(t), x'(t)\,\rangle.$$

従って $\frac{d}{dt}f(t) = -m\langle\, x''(t), x'(t)\,\rangle + m\langle\, x'(t), x''(t)\,\rangle = 0$.

問題 14. (1) 陰関数定理そのものである。(分からない人は陰関数定理を復習しましょう。)
(2) ${}^t(x,y,g(x,y)) \in G$ とすると設問 (1) より $f(x,y,g(x,y)) = c$ だから ${}^t(x,y,g(x,y)) \in f^{-1}(c)$. 特に $G \subset f^{-1}(c)$.

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

以下 $p = {}^t(x_o, y_o, z_o)$ におけるグラフ G の接平面について説明する。次のような二つの $\mathbb{R}^3$ 内の曲線 $\alpha, \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ を考える。

$$\alpha(t) := {}^t(x_o + t, y_o, g(x_o + t, y_o)), \quad \beta(t) := {}^t(x_o, y_o + t, g(x_o, y_o + t)), \quad -\varepsilon < t < \varepsilon.$$

ただし $\varepsilon > 0$ は ${}^t(x_o + t, y_o)$ や ${}^t(x_o, y_o + t)$ が $-\varepsilon < t < \varepsilon$ のとき g の定義域に含まれるよう十分小さく取る。$\alpha(0) = \beta(0) = p$ に注意する。任意の $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して $\alpha(t), \beta(t) \in G$ なので、$t = 0$ におけるそれらの速度ベクトル $\alpha'(0)$, $\beta'(0)$ は G に接している。$\alpha'(0) = {}^t(1, 0, g_x(x_o, y_o))$, $\beta'(0) = {}^t(0, 1, g_y(x_o, y_o))$ であり、これらは一次独立である。よってこれらベクトルで張られる $\mathbb{R}^3$ の 2 次元部分空間を点 p を通るように平行移動したものが、グラフ G の点 p での接平面である。それを具体的に書き表すと問題文にあるような空間となる。

(3) ${}^t(u, v, w)$ が $w - g(q) = (u - x_o)g_x(q) + (v - y_o)g_y(q)$ を満たすと仮定する。$f(x, y, g(x, y)) = c$ を x, y でそれぞれ微分すると (あるいは陰関数定理を用いて) $f_x(p) + g_x(q)f_z(p) = 0$, $f_y(p) + g_y(q)f_z(p) = 0$. また $z_o = g(q)$ に注意すると

$$(u - x_o)f_x(p) + (v - y_o)f_y(p) + (w - z_o)f_z(p) = [(w - g(q)) - (u - x_o)g_x(q) - (v - y_o)g_y(q)]f_z(p) = 0$$

が分かる。また ${}^t(u, v, w)$ が点 p を通り $\nabla f(p)$ に直交するベクトルだとすると

$$(u - x_o)f_x(p) + (v - y_o)f_y(p) + (w - z_o)f_z(p) = 0.$$

これに $z_o = g(q)$, $f_x(p) = -g_x(q)f_z(p)$, $f_y(p) = -g_y(q)f_z(p)$ を代入すると,

$$-(u - x_o)g_x(q)f_z(p) - (v - y_o)g_y(q)f_z(p) + (w - g(q))f_z(p) = 0.$$

両辺を $f_z(p) \neq 0$ で割ると設問 (2) の接空間の式を得る。

問題 15. f の x による偏微分を f_x などと書く.
(1) $f_x = 2x$, $f_y = 2y$ だから原点 ${}^t(0, 0)$ でのみ $\nabla f = 0$. $c > 0$ のとき原点は集合 $f^{-1}(c)$ に含まれない。よって $f^{-1}(c)$ は曲面。$p = {}^t(x_o, y_o) \in f^{-1}(c)$ に対して $\nabla f(x_o, y_o) = {}^t(2x_o, 2y_o)$ である。これに直交して点 p を通る直線は

$$\{{}^t(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_o(x - x_o) + y_o(y - y_o) = 0\}.$$

(2) $f_x = 2x$, $f_y = 2y$, $f_z = 2z$ だから原点 ${}^t(0, 0, 0)$ でのみ $\nabla f = 0$ となる。$c > 0$ のとき原点は集合 $f^{-1}(c)$ に含まれない。よって $f^{-1}(c)$ は曲面。$p = {}^t(x_o, y_o, z_o) \in f^{-1}(c)$ に対して $\nabla f(x_o, y_o, z_o) = {}^t(x_o, y_o, z_o)$. これに直交して点 p を通る平面は

$$\{{}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_o(x - x_o) + y_o(y - y_o) + z_o(z - z_o) = 0\}.$$

(3) $f_x = 2x$, $f_y = 2y$, $f_z = -2z$ だから原点 ${}^t(0, 0, 0)$ でのみ $\nabla f = 0$. $c \neq 0$ のとき ${}^t(0, 0, 0) \notin f^{-1}(c)$ であり、また ${}^t(0, 0, 0) \in f^{-1}(0)$. つまり $c \neq 0$ のときは $f^{-1}(c)$ は曲面であるが $f^{-1}(0)$ は曲面ではない。($f^{-1}(0)$ は原点がとがった錐です。) $p = {}^t(x_o, y_o, z_o)$ に対して $\nabla f(x_o, y_o, z_o) = {}^t(2x_o, 2y_o, -2z_o)$. これに直交して点 p を通る平面は

$$\{{}^t(x, y, z) \mid x_o(x - x_o) + y_o(y - y_o) - z_o(z - z_o) = 0\}.$$

担当教員: 柳田 伸太郎 研究室: A441 E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

(なお $c<0$ に対する $f^{-1}(c)$ は $z>0$ の部分と $z<0$ の部分の二つの部分に分かれます。)

問題 16. f の x による偏微分を f_x, y による偏微分を f_y と書く。
(1) $f_x=2x,\ f_y=-2y$ であり $\nabla f=0$ となるのは ${}^t(x,y)={}^t(0,0)$ のみ。極値点が存在するとすると ${}^t(0,0)$ である。しかし $f(x,0)=x^2$ は $x=0$ で極小。$f(0,y)=-y^2$ は $y=0$ で極大だから ${}^t(0,0)$ は峠点であり、極値は存在しない。
(2) $f_x=3x^2,\ f_y=3y^2$ であり $\nabla f=0$ となるのは ${}^t(x,y)={}^t(0,0)$ のみ。極値点が存在するとすると ${}^t(0,0)$ である。しかし任意の ${}^t(a,b)\in\mathbb{R}^2$ と $t\in\mathbb{R}$ に対して $f(ta,tb)=t^3(a^3+b^3)$ となる。これは t の符号に応じて符号を変える. 従って ${}^t(0,0)$ は f の極値点ではなく峠点でもない。よって極値は存在しない。

問題 17. 対偶を示す。つまり領域 D 上の正則関数 f に対して、その実部 $u(x,y):=\mathrm{Re}\,f(x+iy)$ が極大値を D 内で取ったとすると f が定数であることを示す。u の極大点を $z_o=a+ib\in D$ とする。このとき z_o を中心とする開円板 D_o であって D に含まれ、さらに u は D_o 上で $z=z_o$ で最大値を取るようなものを取ることが出来る。$e^{f(z)}$ は $z\in D$ について正則関数である。また $|e^{f(z)}|=e^{u(x+iy)}$ $(z=x+iy)$ である。これは D_o 上 $z=z_o$ で最大値を取る。最大値の原理を $e^{f(z)}$ に適用すると $e^{f(z)}$ は D_o で定数となる。従って一致の定理より $e^{f(z)}$ は D 上で定数。従って (任意の固定された 0 でない複素数に対して、その近傍で定義される対数の枝が存在するから) f は D 上で定数となる。

問題 18. A は対称行列だからある直交行列 T で対角化できる。つまり A の固有値を λ,μ とすると $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ であり $D:={}^tTAT=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{pmatrix}$ となる。$f(Tp)=\langle ATp,Tp\rangle=\langle {}^tTATp,p\rangle=\langle Dp,p\rangle$ に注意する。$g(p):=f(Tp)$ とおく。$p={}^t(x,y)$ とすると $g(x,y)=\lambda x^2+\mu y^2$ である。

まず $\det A>0$ と仮定する。このとき $\det(A)=\lambda\mu$ だから λ,μ 共に正、または共に負である。$\lambda,\mu>0$ とすると $g(x,y)=\lambda x^2+\mu y^2\geq 0$ であり、この式右辺の各項が非負だから $g(x,y)=0$ となるのは ${}^t(x,y)={}^t(0,0)$ のとき、かつそのときに限る。よって ${}^t(0,0)$ は g の極小点である。また $\lambda,\mu<0$ のときは $g(x,y)=\lambda x^2+\mu y^2$ の右辺の各項は非正である。従って $g(x,y)\leq 0$ であり等号成立は ${}^t(x,y)={}^t(0,0)$ のとき、かつそのときに限る。よって ${}^t(0,0)$ は g の極小点である。$f(p)=g({}^tTp)$ であり T は原点を保つから f についても同様のことが成り立つ。

また $\det(A)<0$ のときは λ,μ のうちどちらかが負で、もう一つが正となる。そこで $\lambda>0,\ \mu<0$ とする。$e_1:={}^t(1,0),\ e_2:={}^t(0,1)$ として, $u:=Te_1,\ v:=Te_2$ とおく。任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して $f(tu)=f(T(te_1))=g(te_1)=\lambda t^2$ となる。これは $t=0$ で狭義の極小値をとる。また $f(tv)=g(te_2)=\mu t^2$ で $\mu<0$ だから、これは $t=0$ で狭義の極大値をとる。つまり ${}^t(0,0)$ は f の峠点である。

問題 19. 関数 f の x による偏微分を f_x, y による偏微分を f_y と書く。
(1) $f_x=3x(x-2),\ f_y=2y$ であり、$f_x=f_y=0$ となる点は ${}^t(0,0)$ と ${}^t(2,0)$ の二つ。Hesse 行列は $H_f(x,y)=\begin{pmatrix}6(x-1)&0\\0&2\end{pmatrix}$ となるから ${}^t(0,0)$ は峠点で ${}^t(2,0)$ は極小点である。一般に極大点、極小点では $\nabla f=0$ となるから極大点は存在せず、極小点は ${}^t(2,0)$ で

$f(2,0)=-4$ は極小値。また $f(x,0)=x^3-3x^2$ は $x\to+\infty$ のとき $+\infty$ に発散、$x\to-\infty$ のとき $-\infty$ に発散する。従って最大値、最小値は存在しない。
(2) $f_x=3(x^2-2y)$, $f_y=3(y^2-2x)$ だから $f_x=f_y=0$ を解くと $x=y=2$ となる。Hesse 行列は $H_f(x,y)=\begin{pmatrix}6x & -6\\ -6 & 6y\end{pmatrix}$ となる。$x=y=2$ のとき $H_f(2,2)$ の固有値は $1,3$ であるため点 ${}^t(2,2)$ は極小点であり $f(2,2)=-8$ は極小値。また $f(x,0)=x^3$ は $x\to+\infty$ で $+\infty$ に、$x\to-\infty$ で $-\infty$ に発散するため、最大値と最小値は存在しない。
(3) $f_x=\cos x+\cos(x+y)$, $f_y=\cos y+\cos(x+y)$ より $f_x=f_y=0$ とすると $\cos x=-\cos(x+y)=\cos y$. $\cos x=\cos y$ の解は $y=\pm x+2n\pi$ (n は整数) だが、$y=x+2n\pi$ とすると $\cos x+\cos(x+y)=2\cos^2 x+\cos x-1$ で、これが 0 となるのは $\cos x=-1,1/2$ の場合、つまり $x=(2m+1)\pi$, または $x=\pm\pi/3+2m\pi$ (いずれも m は整数). また $y=-x+2n\pi$ とすると $\cos x+\cos(x+y)=\cos x+1$ で、これが 0 となるのは $x=(2m+1)\pi$ の場合である。つまり $f_x=f_y=0$ となる点は二つの任意の整数 m,n を用いて

$$p_{m,n}:={}^t((2m+1)\pi,(2n+1)\pi),\quad q^{\pm}_{m,n}:={}^t(\pm\pi/3+2m\pi,\pm\pi/3+2n\pi)\quad(\text{複合同順})$$

の二つの場合となる。Hesse 行列は

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}-\sin x-\sin(x+y) & -\sin(x+y)\\ -\sin(x+y) & -\sin x-\sin(x+y)\end{pmatrix}$$

だから $H_f(p_{m,n})=\mathbf{0}$. また $H_f(q^{\pm}_{m,n})$ の固有値は $\pm\sqrt{3}/2,\pm3\sqrt{3}/2$ (複合同順). つまり $q^{+}_{m,n}$ は (狭義の) 極大点, $q^{-}_{m,n}$ は (狭義の) 極小点であり、$f(q^{+}_{m,n})=3\sqrt{3}/2$ が極大値、$f(q^{-}_{m,n})=-3\sqrt{3}/2$ が極小値となる。

また $f(p_{m,n})=0$ であるが $u={}^t(a,b)\in\mathbb{R}^2$ に対して $\phi(t):=f(p_{m,n}+tu)=-\sin at-\sin bt+\sin((a+b)t)$ となるが、$a=0$ または $b=0$ または $a+b=0$ のときこれは恒等的に 0 である。それ以外のとき $\phi(0)=\phi'(0)=\phi''(0)=0$ であり、$\phi'''(0)=-3ab(a+b)\neq0$ となるが、$\phi(t)=\frac{t^3}{2}\int_0^1(1-r)^2\phi'''(rt)\,dr$ となっている。この式は $\phi'''(0)$ が正でも負でも, t の符号が異なれば $t=0$ の近傍で $\phi(t)$ の符号が異なることを意味している。つまり $p_{m,n}$ は極値ではなくさらに峠点でもない。

さらに $f(s+2m\pi,t+2n\pi)=f(s,t)$ が任意の x,y に対して成り立つことに注意する。$[0,2\pi]\times[0,2\pi]\subset\mathbb{R}^2$ は有界閉集合だから連続関数 f はそこで最大値 A と最小値 B をとる。ここで任意の x,y に対して $x/2\pi$ 以下の最大の整数を m, $y/2\pi$ 以下の最大の整数を n とし、$s:=x-2\pi m$, $t:=y-2\pi n$ とおくと $0\le s,t<2\pi$ が成り立ち、更に $f(x,y)=f(s+2\pi m,t+2\pi n)=f(s,t)$ となる。よって $B\le f(x,y)=f(s,t)\le A$ となるから A,B はそれぞれ $\mathbb{R}^2$ での f の最大、最小値である。つまり f は $\mathbb{R}^2$ で最大値、最小値を取る。更に最大値、最小値をとる点は極大点、極小点でなくてはならず、従って $f(q^{+}_{m,n})=3\sqrt{3}/2$ が最大値、$f(q^{-}_{m,n})=-3\sqrt{3}/2$ が最小値となる。
(4) $f_x=2xe^{-x^2-y^2}(\cos(x^2+y^2)-\sin(x^2+y^2))$, $f_y=2ye^{-x^2-y^2}(\cos(x^2+y^2)-\sin(x^2+y^2))$ より $f_x=f_y=0$ となる点は ${}^t(0,0)$ または $\cos(x^2+y^2)=\sin(x^2+y^2)$ となる点、つまり $x^2+y^2=\pi/4+n\pi$ (ただし $x^2+y^2\ge0$ だから n は非負の整数) を満たす点である。

${}^t(0,0)$ における Hesse 行列は $H_f(0,0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. つまり ${}^t(0,0)$ は狭義の極小点で

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

$f(0,0)=0$. しかし、例えば $f(\pm(\pi/2)^{1/2},0)=\pm e^{-\pi/2}$ だから ${}^t(0,0)$ での f の値 0 は最大値でも最小値でもない。

次に $\nabla f=0$ となる他の点について考える。$n=0,1,\dots$ に対して $r_n:=\sqrt{n\pi+\pi/4}$ とおき、$p_o:={}^t(x_o,y_o)$ を $x_o^2+y_o^2=r_n^2$ となる点とする. このとき直接計算で Hesse 行列 $H_f(p_o)$ の固有値は 0, $(-1)^{n+1}r_n^2$ と分かる。$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とすると $\phi(r):=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=e^{-r^2}\sin r^2$ となることに注意する。$\phi'(r)=2re^{-r^2}(\cos r^2-\sin r^2)$ であり $r>0$ に対して $\phi'(r)=0\iff r=r_n$ である。また $\phi''(r)=(-1)^{n+1}4\sqrt{2}r_n^2e^{-r_n^2}$ である。従って $r=r_n$ は n が偶数のとき $\phi(r)$ の極大点、n が奇数のとき $\phi(r)$ の極小点となる。そこで $\delta_n>0$ を、$|r-r_n|<\delta_n$ ならば n が偶数のとき $\phi(r)\le\phi(r_n)$, n が奇数のとき $\phi(r)\ge\phi(r_n)$ となるように取ることが出来る。ここで $p_o=(r_n\cos\theta_o,r_n\sin\theta_o)$ となる θ_o を取る。また $|r-r_n|<\delta_n$, $|\theta-\theta_o|<\pi/4$ となる任意の (r,θ) に対して n が偶数なら $f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\phi(r)\le\phi(r_n)=f(r\cos\theta_o,r\sin\theta_o)$, n が奇数なら $f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\phi(r)\ge\phi(r_n)=f(r\cos\theta_o,r\sin\theta_o)$ が成り立つ。まとめると $r_n:=\sqrt{\pi/4+n\pi}$ $(n=0,1,2,\dots)$ とおくとき、n が偶数なら $x^2+y^2=r_n^2$ を満たす点 ${}^t(x,y)$ はすべて (狭義ではない) 極大点、n が奇数なら $x^2+y^2=r_n^2$ を満たす点 ${}^t(x,y)$ はすべて (狭義ではない) 極小点となる.

また $\phi(r_n)=(-1)^ne^{-r_n^2}/\sqrt{2}=(-1)^ne^{-\pi/2-n\pi}/\sqrt{2}$ であるから、$|\phi(r_n)|=e^{-\pi/2-n\pi}/\sqrt{2}$ は n について単調減少である。特に $r\ge0$ に対して $|\phi(r)|\le e^{-r^2}$ であり $r\ge r_1$ に対して $|\phi(r)|\le|\phi(r_1)|\le\phi(r_0)$ が成り立つ。従って $\phi(r_0)=e^{-\pi/4}/\sqrt{2}$ が ϕ の最大値、$\phi(r_1)=-e^{-5\pi/4}/\sqrt{2}$ が最小値となる。よって $x^2+y^2=r_0^2$ を満たす点 ${}^t(x,y)$ において $f(x,y)=e^{-\pi/4}/\sqrt{2}$ が f の最大値、$x^2+y^2=r_1^2$ を満たす点 ${}^t(x,y)$ において $f(x,y)=-e^{-5\pi/4}/\sqrt{2}$ が f の最小値となる。

問題 20. 底面の縦横の長さをそれぞれ x,y とし、箱の高さを z とする。箱の体積を V, 表面積 (上面を開けていることに注意) を S とすると、$V=xyz$, $S=xy+2(x+y)z$ となる。従って問題は $xy+2(x+y)z=12$ の下で体積 $V=xyz$ を最大にするような x,y,z を求めることとなる。第一式から z を消去すると

$$V=V(x,y):=\frac{xy(12-xy)}{2(x+y)}$$

となる。ここで x,y,z は正の数だから $x,y>0$. また底面の面積 xy は全体の表面積 12 を超えないため $xy<12$ となる。従って問題は関数 $V(x,y)$ の x-y 平面の領域

$$D:=\{{}^t(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0<x,\ 0<y,\ xy<12\}$$

での最大値を与える点を求めることになる。

領域 D は開集合であり $V(0,y)=V(x,0)=0$. また $xy=12$ のとき $V(x,y)=0$ だから V は領域 D の境界から原点を除いたところで 0 である。さらにこの領域内で ${}^t(x,y)={}^t(r\cos\theta,r\sin\theta)$ とおくと $0<\theta<2\pi$ ととれ、$\sin\theta+\cos\theta>0$ であり

$$\lim_{D\ni{}^t(x,y)\to{}^t(0,0)}V(x,y)=\lim_{r\to0}\frac{r\cos\theta\sin\theta(12-r^2\cos\theta\sin\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=0$$

となることに注意する。また ${}^t(x,y)\in D$ のとき $x^2+y^2=r^2$ より $(x+y)^2=r^2+2xy>r^2$ だから、$V(x,y)\le12^2/2r$ となる。従って V は D とその境界あわせた領域で連続関数となり、しかも有界であることに注意する。

V を偏微分すると

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2(12-2xy-x^2)}{2(x+y)^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(12-2xy-y^2)}{2(x+y)^2}.$$

従って ${}^t(x,y) \in D$ のとき $\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = 0$ となるのは $x^2+2xy-12 = y^2+2xy-12 = 0$ のとき、かつそのときに限る ($x, y > 0$ に注意)。この式から $x^2 = y^2$, つまり $x = y$ が得られ、これを更に代入して $3x^2 = 12$, つまり $x = y = 2$ が得られる。このとき $z = (12-xy)/2(x+y) = 1$ となる。つまり D 内に極値があるとするとそれは ${}^t(2,2)$ 以外にない。また $V(2,2) = 4$ であり、一般に $V(x,y) \leq 12^2/r$ だから、$r = \sqrt{x^2+y^2} > 12^2$ となる D の点では最大値を取らない。つまり V は領域 D で最大値を取ることが分かるが、それは極値でなくてはならず、従って点 ${}^t(2,2)$ で V は最大値をとることが分かる。つまり作りたい箱は底面が 2×2 の正方形で高さが 1 のものである。

問題 21. $|x-a_l|^2 = |x|^2 - 2\langle x, a_l \rangle + |a_l|^2$ となる。従って $a := \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} a_l \in \mathbb{R}^n$, $c := \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} |a_l|^2 \in \mathbb{R}$ とおくと $f(x) = L(|x|^2 - 2\langle x, a \rangle + c)$ となる。また $f(a) = L(c - |a|^2)$ に注意すると

$$f(x) = L(|x|^2 - 2\langle x, a \rangle + |a|^2 - |a|^2 + c) = L|x-a|^2 + f(a)$$

だから $f(x) \geq f(a) \geq 0$ であり $f(x) = f(a) \iff x = a$. よって f を最小にする点は $a = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} a_l$.

問題 22. A は実 n 次対称行列だからある直交行列 T で対角化できる。$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ をその固有値 (重複度の分だけ重複して小さい順に並べたもの) とすれば $D : {}^tTAT = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ T は直交行列だから ${}^tT = T^{-1}$ に注意すると、任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ が成り立つことに注意する。$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底として $u_j := Te_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ とおくと $\langle u_i, u_j \rangle = \langle Te_i, Te_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$. (但し $\delta_{i,j}$ は $i = j$ のとき 1, $i \neq j$ のとき 0 という記号。) つまり $\{u_1, \ldots, u_n\}$ は正規直交基底であり $T = [u_1, \ldots, u_n]$ となっている。また $AT = TD$ に注意すると $Au_j = ATe_j = TDe_j = T(\lambda_j e_j) = \lambda_j Te_j = \lambda_j u_j$. つまり $\{u_1, \ldots, u_n\}$ は A の固有ベクトルからなる正規直交基底である。

また任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ は $x = \sum_{j=1}^{n} x_j u_j$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j u_j$ $(x_j, y_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, n)$ と書けて、更に $\{u_1, \ldots, u_n\}$ が正規直交基底だから $\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ となる。これらに注意して問題を解く。

任意の $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \in \mathbb{R}^n$ に対して $Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i Au_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i u_i$ だから $f(x) = \langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ となる。特に $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ と並べていたから $\lambda_1 |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 x_i^2 \leq f(x) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_n x_i^2 = \lambda_n |x|^2$. よって $|x| = 1$ のとき $\lambda_1 \leq f(x) \leq \lambda_n$. また $|u_j| = 1$ であり $f(u_j) = \langle Au_j, u_j \rangle = \lambda_j \langle u_j, u_j \rangle = \lambda_j$. 特に $f(u_1) = \lambda_1$, $f(u_n) = \lambda_n$ である。従って f は $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ で最大値 λ_n, 最小値 λ_1 を取ることがわかり、設問 (1) が示せた。また $\lambda = \lambda_n$, $\mu = \lambda_1$ は固有値であるから設問 (2) も示せた。