担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

多変数関数の微積分

作成日: 11/13/2016　更新日: 11/20/2016　Version: 0.2　配布日: 11/24/2016

このセットと次のセットでは多変数関数の微積分、特に微分を扱う。今回は多変数関数の微分法について復習する。Lagrange 未定乗数法などは次回扱う。

特に断らない限り U は $\mathbb{R}^n$ の開集合とする。また $e_1, \ldots, e_n$ で $\mathbb{R}^n$ の標準基底を表す。つまり e_i は $\mathbb{R}^n$ 内の第 i 成分が 1, その他の成分が 0 のベクトルである。

方向微分と微分可能性

関数 $f : U \to \mathbb{R}^m$ と $u \in \mathbb{R}^n$ そして $a \in U$ に対して

$$\lim_{0 \neq t \in \mathbb{R},\, t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}$$

が存在するとき、f は a で u 方向に微分可能であるといい、上記の極限を $D_u f(a)$ と書く。$D_u f(a)$ を f の a での u 方向の方向微分と呼ぶ。このとき $D_u f(a) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(a+tu)$ に注意。特に $u = e_i$ のとき

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := D_{e_i} f(a)$$

と書き、x_i についての f の a での偏微分と言う。

問題 1. 次の関数について ${}^t(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ が存在するかどうか判定し、存在する場合はそれを求めよ。

(1) $f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & {}^t(x,y) \neq {}^t(0,0) \\ 0, & {}^t(x,y) = {}^t(0,0) \end{cases}$　　(2) $f(x,y) := x\sqrt{|y|}$.

(3) $f(x,y) := \begin{cases} x\log(x^2+y^2), & {}^t(x,y) \neq {}^t(0,0) \\ 0, & {}^t(x,y) = {}^t(0,0) \end{cases}$.　　(4) $f(x,y) := \sqrt{|xy|}$

問題 2. $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を次式で与える。

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y \sin x}{x^2+y^2}, & {}^t(x,y) \neq {}^t(0,0) \\ 0, & {}^t(x,y) = {}^t(0,0) \end{cases}$$

(1) ${}^t(a,b) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ を求めよ。
(2) $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(0,0)$, $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(0,0)$ は共に存在するが値が異なることを示せ。

$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし $f : U \to \mathbb{R}^m$ を写像とする。f が $a \in U$ で微分可能または全微分可能であるとは、ある $m \times n$ 行列 M が存在して,

$$\lim_{0 \neq h \in \mathbb{R}^n,\, h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Mh}{|h|} = 0$$

が成り立つときを言う。このとき

$$M = f'(a) = df_a$$

などと書き、f の a での微分または全微分と言う。f が任意の $a \in U$ で微分可能であるとき、f は U 上微分可能であると言う。写像 $f : U \to \mathbb{R}^m$ を

$$f(x) = {}^t(f_1(x), \dots, f_m(x)) \quad (x = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n)$$

と書くと、f が $a \in U$ で微分可能であることと各 f_i $(i = 1, \dots, m)$ が U 上の実数値関数として a で微分可能であることは同値で、更にそのとき次が成り立つ。

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

問題 3. A を $m \times n$ 型の実行列、$b \in \mathbb{R}^m$ とする。$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を $f(x) = Ax + b$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ で定義する。このとき f は $\mathbb{R}^n$ で微分可能であることを示し、$f'(x)$ を求めよ。

問題 4. $f : U \to \mathbb{R}^m$ が $a \in U$ で微分可能なら、任意の $u \in \mathbb{R}^n$ に対して f は a で u 方向に微分可能で $D_u f(a) = f'(a)u$ が成り立つことを、定義から直接示せ。但し $f'(a)u$ は $m \times n$ 型行列 $f'(a)$ と n 次縦ベクトル u の積である。

問題 5. $\mathbb{R}^2$ で定義された次の実数値関数 f を考える。

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2 + y\sin(xy)}{x^2 + y^4\cos^2 x} & {}^t(x, y) \neq {}^t(0, 0) \text{ のとき} \\ 0 & {}^t(x, y) = {}^t(0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$$

(1) 任意の $0 \neq u \in \mathbb{R}^2$ について f は u 方向に微分可能なことを示し $D_u f(0, 0)$ を求めよ。
(2) f は原点 ${}^t(0, 0)$ で微分可能でないことを示せ。

問題 6. 問題 1 の四つの関数について原点 ${}^t(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ で微分可能かどうか判定せよ。

連鎖律

$U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ を開集合とし $f : U \to \mathbb{R}^m$, $g : V \to \mathbb{R}^k$ は微分可能で $f(U) \subset V$ なる関数とする。このとき $g \circ f(x) := g(f(x))$ で定義される $g \circ f : U \to \mathbb{R}^k$ は微分可能になり、更に次の連鎖律が成立した。

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

問題 7. 以下のような状況で $g \circ f$ の微分に関する連鎖律を成分表示して書き下せ。
(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のとき。　(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ のとき。

問題 8. $f : U \to \mathbb{R}^m$ を C^1 級 (つまり f の各成分が C^1 級) な写像とする。$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ を曲線として $a := c(0)$, $u := c'(0)$ とする。このとき $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(c(t))$ を f の a での u 方向の方向微分で書き表せ。

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

$U \subset \mathbb{R}^n$ 上の C^1 級の実数値関数 f に対して次式で定義される $\nabla f(x)$ を f の勾配ベクトル場と呼ぶ。

$$\nabla f(x) := {}^t f'(x) = {}^t\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

問題 9. f を $U \subset \mathbb{R}^n$ 上の C^1 級関数とする。
(1) $\langle \nabla f(x), u \rangle = D_u f(x)$ $(x \in U)$ を示せ。但し $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の Euclid 内積。
(2) $x \in U$ に対して $\nabla f(x) \neq 0$ のとき $\max_{u \in \mathbb{R}^n, |u|=1} D_u f(x)$ を求めよ。また最大値を与える u を求めよ。

問題 10. f を $\mathbb{R}^2 \setminus \{{}^t(0,0)\}$ 上の C^1 級関数とする。${}^t(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{{}^t(0,0)\}$ を $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と極座標表示し $g(r,\theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおく。

(1) $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2.$　(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}.$

問題 11. 定数 $c > 0$ と $\mathbb{R}$ 上の C^2 級実数値関数 ϕ, ψ に対して $f(t,x) := \phi(x-ct) + \psi(x+ct)$ で定義される $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f は微分方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

を満たすことを確認せよ。また、逆にこの方程式を満たすような $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級の実数値関数 f に対して、上記のような関数 ϕ, ψ が存在して $f(t,x) = \phi(x-ct) + \psi(x+ct)$ となることを示せ。

問題 12. $\mathbb{R}^n$ 上の n 個の実数値 C^1 級関数 $P_1, \dots, P_n$ が, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial P_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

を満たしていると仮定する。このとき $\mathbb{R}^n$ 上のある C^2 級関数 f が存在して $\nabla f(x) = {}^t(P_1, \dots, P_n)$ となることを示せ。

問題 13. Φ を $\mathbb{R}^n$ 内の開集合 U 上の C^1 級関数とする。また正の定数 m があって、U 内の C^2 級の曲線 $x = x(t)$ $(a \le t \le b)$ が次を満たしているとする。

$$m x''(t) = -\nabla\Phi(x(t)) \quad (a \le t \le b).$$

このとき $t \in [a,b]$ の関数 $\Phi(x(t)) + \frac{1}{2}m|x'(t)|^2$ は定数関数であることを示せ。

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

曲面と接空間

$U \subset \mathbb{R}^n$ 上の C^1 級の関数 $f : U \to \mathbb{R}$ と $c \in \mathbb{R}$ を使って

$$f^{-1}(c) = \{p \in U \mid f(p) = c\}$$

と書ける $\mathbb{R}^n$ の部分集合を考える。任意の $p \in f^{-1}(c)$ で $\nabla f(p) \neq 0$ となるとき、$f^{-1}(c)$ を曲面と呼ぶ。

$f^{-1}(c)$ を曲面として $p \in f^{-1}(c)$ とすると、$\nabla f(p) \neq 0$ なので x を通り $\nabla f(p)$ に直交する $\mathbb{R}^n$ 内の超平面が定まる。これを $f^{-1}(c)$ の p における接空間と呼ぶ。

例えば $n = 3$ のときは、この意味での曲面は通常の $\mathbb{R}^3$ 内の曲面あり、その接空間は通常の接平面のことである。また $n = 2$ のときは、この意味での曲面は曲線となり、接空間は接線のことである。

問題 14. f を $\mathbb{R}^3$ 上の C^1 級の関数、$c \in \mathbb{R}$ とし、更に $p = (x_o, y_o, z_o) \in f^{-1}(c)$ は $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ と満たすと仮定する。$q := {}^t(x_o, y_o)$ とおく。
(1) p を含む $\mathbb{R}^3$ の開集合 U と $q = {}^t(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ を含む開集合 V, そして V 上の C^1 級関数 g が存在して、${}^t(x, y, z) \in U$ に対して $f(x, y, z) = c \iff z = g(x, y)$ が成り立ち、更に $z_o = g(q)$ となることを示せ。
(2) 設問 (1) で見つけた関数 $g : V \to \mathbb{R}$ に対してそのグラフを

$$G := \{{}^t(x, y, g(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid {}^t(x, y) \in V\}$$

とする。設問 (1) より $G \subset f^{-1}(c)$ である (各自確かめよ)。このグラフの点 p での (通常の意味の) 接空間は次で与えられることを説明せよ。

$$\left\{ {}^t(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, w - g(q) = (u - x_o)\frac{\partial g}{\partial x}(q) + (v - y_o)\frac{\partial g}{\partial y}(q) \right\}.$$

(3) 設問 (2) で与えられた空間は点 p を通り $\nabla f(p)$ と直交する平面であること (つまり $f^{-1}(c)$ の p での上記の意味での接平面となること) を示せ。

問題 15. 以下の関数 f に対して $f^{-1}(c)$ (c は指定された実数) は曲面であるか否か答えよ。また曲面である場合は $p \in f^{-1}(c)$ での $f^{-1}(c)$ の接空間を求めよ。

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$ (c は任意の正の実数).

(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (c は任意の正の実数).

(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ (c は任意の実数).

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

極値と最大値・最小値

f を $\mathbb{R}^n$ の (開集合とは限らない) 部分集合 A で定義された実数値関数とし、a を A の内点、つまり $U(a;\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| < \varepsilon\} \subset A$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する点とする。

このとき f が点 a で極大 (または極小) であるとは、上記のような $\varepsilon > 0$ で、更に任意の $a \neq x \in U(a;\varepsilon)$ に対して $f(x) \leq f(a)$　(または $f(x) \geq f(a)$) となるものが存在するときを言う。このとき $f(a)$ を極値と呼び、a を極値点と呼ぶ。

$a \neq x$ に対して $f(x) < f(a)$ (または $f(x) > f(a)$) が成り立つとき a を狭義の極大点 (または狭義の極小点) と呼ぶ。

$a \in A$ が極値点であれば $\nabla f(a) = 0$, つまり $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ が成り立つが、逆は成立しない。

f の峠点 a とは、$\nabla f(a) = 0$ だが極値点ではなく、更に 0 でない二つのベクトル $u, v \in \mathbb{R}^n$ があって t についての一変数関数 $f(a+tu)$ が $t=0$ で狭義の極大、$f(a+tv)$ が $t=0$ で狭義の極小となるときを言う。

問題 16. 次の関数 f は与えられた集合 A で極値を取るか否か答えよ。

(1) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $A = \mathbb{R}^2$.　　(2) $f(x,y) = x^3 + y^3$, $A = \mathbb{R}^2$.

問題 17. $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{C}$ を対応 ${}^t(x,y) \mapsto x + iy$ で同一視する。D を $\mathbb{C}$ の領域とし、$f : D \to \mathbb{C}$ を定数でない正則関数とする。任意の $(x,y) \in D$ に対して $u(x,y) := \mathrm{Re}(f(x+iy))$ とおく。このとき u は D 内で極大値を持たないことを示せ。
(ヒント: 正則関数 $e^{f(z)}$ に最大値の原理を適用する。)

開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上の C^2 級の実数値関数 f に対して、$\nabla f(a) = 0$ となる点 a が極大・極小点かどうか判定する際に、次の Hesse 行列 $H_f(a)$ を用いると良い場合がある。

$$H_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

これは n 次実正方行列で、f を C^2 級と仮定していることから対称行列になる。

定理 1.　f は開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上の C^2 級の実数値関数であって、$a \in U$ において $\nabla f(a) = 0$ だとする。このとき

(1) $H_f(a)$ の固有値が全て正ならば a は狭義の極小点である。

(2) $H_f(a)$ の固有値が全て負ならば a は狭義の極大点である。

(3) $H_f(a)$ が正の固有値と負の固有値両方を持てば a は峠点である。

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 18. A を 2 次実対称行列として $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(p) := \langle Ap, p \rangle \quad (p = {}^t(x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

を考える。$\det A > 0$ ならば ${}^t(0,0)$ は狭義の極小点または極大点であることを (上の定理を用いずに) 示せ。また $\det A < 0$ ならば ${}^t(0,0)$ は峠点であることを示せ。

問題 19. 次の関数 f の極大点、極小点と極値を全て求めよ。f の最大値、最小値も全て求めよ。

(1) $f(x,y) := x^3 + y^2 - 3x^2$.　(2) $f(x,y) := x^3 + y^3 - 6xy$.

(3) $f(x,y) := \sin x + \sin y + \sin(x+y)$.　(4) $f(x,y) := e^{-x^2-y^2}\sin(x^2+y^2)$.

問題 20. 直方体の箱 (上面の開いたもの) を作りたい。表面積が 12 であるもののうち体積が最大のものはどのようなものか？
(注意: 上面が開いているので表面は合計 5 つの長方形からなる。)

問題 21. $a_1, \ldots, a_L \in \mathbb{R}^n$ として $\mathbb{R}^n$ 上の関数 f を次で定義する。

$$f(x) := \sum_{l=1}^{L} |x - a_l|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

このとき f を最小にする点を求めよ。

問題 22. A を実 n 次対称行列とし $\mathbb{R}^n$ 上の関数 f を $f(x) := \langle Ax, x \rangle$ で定義する。但し $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の Euclid 内積.

(1) f は曲面 $\{x \in \mathbb{R}^n ; |x|^2 = 1\}$ 上で最大値、最小値を持つことを示せ。この最大値、最小値をそれぞれ λ, μ とする。

(2) λ は A の最大の固有値、μ は A の最小の固有値であることを示せ。