担当教員: 柳田　伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

小テスト (12/15) 解答

作成日: 12/13/2016　更新日: 12/19/2016　Version: 1.0　配布日: 12/22/2016

学生番号 ____________________ 名前 ____________________

問題 1. 実数成分の $m \times n$ 型行列たちのなす集合を $M(m,n)$ と書く。
(1) 行列の行基本変形とは何か述べよ。
(2) $A,B \in M(m,n)$ について「A に行基本変形を何回か施すと B になる」時に $A \sim B$ と書くことにする。この $\sim$ が $M(m,n)$ 上の同値関係であることを説明せよ。
(3) 行列の階数 (rank) の定義を述べよ。
(4) 非負整数の集合を $\mathbb{N}$ と書く。また $A \in M(m,n)$ の $\sim$ に関する同値類を $[A]$ と書く。商集合 $M(m,n)/\sim$ から $\mathbb{N}$ への写像 φ を

$$\varphi : (M(m,n)/\sim) \longrightarrow \mathbb{N}, \quad [A] \longmapsto (A\text{ の階数})$$

で定めたい。φ が well-defined であることを説明せよ。
(5) φ の像を決定せよ。

解答.
(1) 次の三種類の変形を行基本変形と呼ぶ。
　(i) c を 0 でない実数として、ある行を c 倍する。
　(ii) 2 つの行を置換する。
　(iii) ある行に他の行を加える。
(2) $A \sim A$ は明らか。3 種類の行基本変形はどれも逆の変形が存在するので $A \sim B$ なら $B \sim A$ が成立する。$A \sim B$ かつ $B \sim C$ なら行基本変形を続けて行うことで A から C に変形できるから $A \sim C$.
(3) 行列 A の行ベクトルのうち 1 次独立なものの最大個数を A の階数と呼ぶ。
(4) 前問 (1) で述べた 3 種類の行基本変形について、(ii) は行ベクトルの集合 L は変えず、また (i) と (iii) は L のうち 1 つの元を線形結合で置き換えるだけなので、L のうち 1 次独立なものの個数は変わらない。従って行基本変形で階数は不変である。つまり $B,C \in [A]$ なら B と C の階数は等しい。従って φ は well-defined.
(5) $M(m,n)$ の元の階数として現れうる整数の集合だから、答えは $\{0,1,\ldots,\min(m,n)\}$.

解説.
各問 2 点ずつで採点しました。平均点は 6.0 点でした。
(3) はもちろん「行基本変形で階段行列に簡約化た時に現れる零ベクトルでない行ベクトルの数」でも構いません。その場合 (4) は $A \sim B$ なら簡約化の結果は同じことから従います。
また (3) は「A(に対応する線形写像) の像の次元」でも構いません。その場合 (4) は、行基本変形が対応する正則行列を左からかけることにあたり、また正則行列が線形同型に対応することから従います。