担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

正則関数と留数計算

作成日: 11/02/2016　更新日: 11/07/2016　Version: 1.0　　配布日: 11/10/2016

このセットでは正則関数、特に留数定理を用いた定積分の計算などを復習する。複素平面上の曲線とは区分的に滑らか (C^1 級) であって微分できる各点での微分が 0 でないものとする。また $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ に対して $[a, b]$ で a から b に向かう有向線分を表す。

複素線積分

領域 D 上の複素数値連続関数 $f(z)$ と D 内の曲線 $C = \{z(t) \mid a \leq t \leq b\}$ に対して

$$\int_C f(z)\,dz \;:=\; \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt$$

と定義し f の C 上での線積分と呼ぶ。また C を積分路と呼ぶ。

問題 1. 整数 n に対して次の積分を計算せよ。ただし $\varepsilon > 0$ とする。

(1) $\displaystyle\int_{|z|=\varepsilon} z^n\,dz$　　(2) $\displaystyle\int_{|z|=\varepsilon} \overline{z}^n\,dz$

正則関数と Cauchy の積分定理

領域 D 上の関数 $f(z)$ が D で正則であるとは f が D の各点で複素微分可能な場合を言う。ここで f が点 z で複素微分可能であるとは極限 $\lim_{h\to 0}\bigl(f(z+h)-f(z)\bigr)/h$ が存在することを言う。このとき上の極限を $f'(z)$ や $\frac{df}{dz}(z)$ などと書く。

問題 2. 次の関数は $D := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ で正則かどうか理由とともに答えよ。

(1) $f(z) = z^n \quad (n \in \mathbb{Z})$　　(2) $g(z) = \overline{z}^n \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$

定理 1. $D \subset \mathbb{C}$ を有限個の単純閉曲線で囲まれている領域とし、∂D をそれら有限個の単純閉曲線の和集合とする。∂D には D から定まる正の向きを入れる。$f(z)$ は D と ∂D を含むある領域で正則な関数とする。このとき次が成り立つ。

(1) $\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0$　　(Cauchy の積分定理).

(2) 任意の $z \in D$ に対して $\displaystyle f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$　　(Cauchy の積分公式).

補足 1.　上記の定理に関して幾つか注意

(1) ∂D の「D から定まる正の向き」とは ∂D に沿って D が左手に見える向きのこと。

(2) 定理 1(1) から正則関数の線積分は積分路を (ある程度) 変更しても値が変わらないことが分かる (積分路変形の原理)。

(3) 定理 1 のより精密な記述は、例えば次の参考文献を参照のこと:
杉浦光夫 著「解析入門 II」(基礎数学 3)　東京大学出版会　1985 年.

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3. 相異なる三つの複素数 $a, b, c \in \mathbb{C}$ に対して次の積分を考える:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z-a)(z-b)(z-c)}.$$

この線積分を以下の場合に計算せよ。ただし C は $\mathbb{C}$ 内の円周で a, b, c を通らないもの、D は C によって囲まれる領域 (開円板) とし、C には正の向きを与えておく。

(1) $a, b, c \notin D$ のとき。
(2) $a \in D$, $b, c \notin D$ のとき。
(3) $a, b \in D$, $c \notin D$ のとき。
(4) $a, b, c \in D$ のとき。

Cauchy の積分定理を利用すれば次のような定積分の計算が可能になる。

問題 4. $a > 0$, $a \neq 1$ に対して次の積分を考える:

$$I(a) := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}.$$

$f(z) := 1/\big((z-a)(z-1/a)\big)$ とおき C で原点を中心とする単位円周を表す。

(1) 積分 $\int_C f(z)\,dz$ の値を求めよ。

(2) 設問 (1) の線積分を定義に沿って計算することにより $I(a)$ を求めよ.

問題 5. 次の積分を考える:

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

また $0 < \varepsilon < R$ とし、$C(R)$ は R から $-R$ まで原点中心の半径 R の上半円周に沿って進む曲線、$C_1 := [-R, -\varepsilon]$, $-C(\varepsilon)$ は $C(\varepsilon)$ と逆向きの曲線、$C_2 := [\varepsilon, R]$ とする。そして $C(R), C_1, C_2, -C(\varepsilon)$ をこの順につなげた閉曲線を C とする。最後に $f(z) := e^{iz}/z$ とおく。

(1) 積分 I は収束していることを示せ。

(2) Cauchy の積分定理を $\int_C f(z)\,dz$ に適用することにより次が成り立つことを示せ。

$$2i\int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x}\,dx \;=\; \int_{C(\varepsilon)} f(z)\,dz - \int_{C(R)} f(z)\,dz$$

(3) $\lim_{R\to+\infty} \int_{C(R)} f(z)\,dz = 0$ を示せ。(ヒント：$t \in [0, \pi/2]$ で $\sin t \geq 2t/\pi$.)

(4) $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C(\varepsilon)} f(z)\,dz = i\pi$ を示し、結論として $I = \pi/2$ を示せ。

問題 6. D を $\mathbb{C}$ 内の開円板とし、f を D 上の複素数値連続関数とする。もし f が D 内の任意の閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

を満たすなら、f は D で正則であることを示せ。

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 7. $f(z)$ を多項式とし、C を $\mathbb{C}$ 内の単純閉曲線とする。$a_1, \ldots, a_s$ を C で囲まれる領域内の $f(z)$ の零点 (根) として、a_j の重複度を n_j とする。また $f(z)$ は C 上では 0 にならないものとする。このとき次を示せ:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = n_1 + \cdots + n_s.$$

Laurent 展開と留数定理

$f(z)$ が $a \in \mathbb{C}$ の近傍で正則であれば、$f(z)$ は正の収束半径を持つ a を中心とするベキ級数に (一意的に) 展開される (Taylor 展開)：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\,d\zeta.$$

ここでは関数 $f(z)$ が a の近傍で a を除いて正則なものを考える。関数 $f(z)$ が $R > 0$ を適当にとると $0 < |z-a| < R$ で正則なとき a を f の孤立特異点と呼ぶ。

定理 2. $a \in \mathbb{C}$ とする。関数 $f(z)$ が $0 < |z-a| < R$ で正則なら、f は D で局所 (広義) 一様収束する次のような級数で (一意的に) 表される：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\,d\zeta$$

ただし $0 < r < R$ であり円周 $|\zeta - a| = r$ には正の向きを与える。上記の級数表示を $f(z)$ の a の周りでの Laurent 展開と呼ぶ。また $f(z)$ の Laurent 展開の負ベキの項の和 $P_f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$ を $f(z)$ の主要部と呼ぶ。

これから除外された点 a が三つの種類に類別されることが分かる。

(1) a における $f(z)$ の主要部 $P_f(z)$ が 0 のとき、a を $f(z)$ の除去可能特異点と呼ぶ。

(2) ある自然数 k があって $a_{-k} \neq 0$ であり $a_{-n} = 0$ $(n \geq k+1)$ となるとき、a は $f(z)$ の k 位の極と言う。

(3) $a_{-n} \neq 0$ が無限に多くの n について成り立つとき、a を $f(z)$ の真性特異点と呼ぶ。

問題 8. 以下の関数 f に対して $z = 0$ はどのような孤立特異点であるか判定せよ。また $z = 0$ が f の極である場合、それが何位の極か答えよ。

(1) $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^3}$　　(2) $f(z) = \dfrac{(z+1)(z-i)}{z^4 (z+2i)(z-8)^8}$

(3) $f(z) = \dfrac{1}{\sin^k z}$ $(k \in \mathbb{N})$　　(4) $f(z) = \sin(1/z)$

問題 9. $a = 0$ を除去可能特異点、k 位の極 $(k \in \mathbb{N})$、真性特異点としてもつ関数の (上記の問題のもの以外の) 例をそれぞれ一つずつあげよ。

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

a が $f(z)$ の孤立特異点であるとき

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) := a_{-1} \quad (a_{-1} \text{ は } f \text{ の Laurent 展開の } (z-a)^{-1} \text{ の係数})$$

とおき、$f(z)$ の a における留数と呼ぶ。次の留数定理は理論上と応用上共に重要です。

定理 3. 関数 $f(z)$ は領域 D 上で有限個の孤立特異点 $a_1, \ldots, a_N$ を除き正則であるとする。また D 内の単純閉曲線 C は $a_1, \ldots, a_N$ を囲み、C の囲む領域が D に含まれるものとする。このとき次が成り立つ：

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=a_j} f(z).$$

問題 10. $a, b \in \mathbb{C}$ は $0 < |a| < |b|$ を満たすものとし、また $r > 0$ に対して $C(r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ とする。関数 $f(z)$ は $|z| < R$ 上で孤立特異点 a, b を除き正則だとする。但し $R > |b|$ である。以下の各場合について積分 $\frac{1}{2\pi i} \int_{C(r)} f(z)\, dz$ を留数を用いて表示せよ。

(1) $0 < r < |a|$ のとき。　(2) $|a| < r < |b|$ のとき。　(3) $|b| < r$ のとき。

このように積分路が孤立特異点を飛び越して変形されるとき、積分は孤立特異点 a での留数の分だけ変化する。これを定積分の計算に応用することが出来る。

問題 11. $0 < \alpha < 1$ に対して次の積分を考える：

$$I(\alpha) := \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\, dx.$$

(1) 積分 $I(\alpha)$ は絶対収束することを示せ.

(2) 対数の枝 $\log z = \log|z| + i\theta$ $(z = |z|e^{i\theta},\ 0 < \theta < 2\pi)$ を用いて $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$ とする。また $f(z) := z^\alpha / \bigl(z(1+z)\bigr)$ とする。$r > 0$ と $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ に対して $C(r, \delta)$ を原点中心の半径 r の円に沿って $re^{i\delta}$ から $re^{i(2\pi-\delta)}$ まで進む曲線とし、$-C(r, \delta)$ をその逆向きの曲線とする。このとき任意の $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, $0 < r \neq 1$ に対して次の不等式を示せ。

$$\left| \int_{C(r,\delta)} f(z)\, dz \right| \le \frac{2\pi r^\alpha}{|1-r|}.$$

(3) $0 < \varepsilon < 1 < R$ とする。$C(R, \delta)$, $[Re^{i(2\pi-\delta)}, \varepsilon e^{i(2\pi-\delta)}]$, $-C(\varepsilon, \delta)$, $[\varepsilon e^{i\delta}, Re^{i\delta}]$ をこの順でつないだ閉曲線上での $f(z)$ の線積分に留数定理を用いて $I(\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$ を示せ。但し以下の事実を用いても構わない。

I を $\mathbb{R}$ の有界閉区間、$K \subset \mathbb{R}^n$ を有界閉集合とする。$\phi(\delta, x)$ を $(\delta, x) \in I \times K$ 上の連続関数とする。$\delta_o \in I$ のとき $\lim_{\delta \to \delta_o} \phi(\delta, x) = \phi(\delta_o, x)$ は $x \in K$ について一様収束する。

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 12. $n \geq 3$ を整数、$0 < \alpha < n$ として次の積分を考える。

$$I(\alpha, n) := \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x^n + 1}\, dx.$$

(1) 積分 $I(\alpha, n)$ は絶対収束することを示せ。

(2) 対数の枝 $\log z = \log|z| + i\theta$ ($z = |z|e^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$) を用いて $z^\alpha := e^{\alpha \log z}$ と定義する。このとき $f(z) := z^\alpha / (z(1 + z^n))$ の $z = e^{\pi i/n}$ における留数を求めよ。

(3) 任意の $r > 0$ に対して曲線 $C(r)$ を r から原点中心の半径 r の円周に沿って $re^{2\pi i/n}$ まで進む曲線とする。任意の $r > 0$, $r \neq 1$ に対して次の不等式を示せ。

$$\left| \int_{C(r)} f(z)\, dz \right| \leq \frac{2\pi r^\alpha}{n|r^n - 1|}.$$

(4) $0 < \varepsilon < 1 < R$ とする。$C(R)$, $[Re^{2\pi i/n}, \varepsilon e^{2\pi i/n}]$, $-C(\varepsilon)$, $[\varepsilon, R]$ をこの順につないだ閉曲線での $f(z)$ の線積分に留数定理を用いて $I(\alpha, n) = \pi / (n \sin(\pi\alpha/n))$ を示せ。

(5) 設問 (4) の結論は $n = 2$ でも正しい。このことを示せ。

ここで次のような一般的な事実を考えよう。

問題 13. $a \in \mathbb{C}$ が $f(z)$ の 1 位の極であるとする。実数 θ と $\varepsilon > 0$ に対し $C(\varepsilon, \theta) := \{a + \varepsilon e^{it} \mid \theta \leq t \leq \theta + \pi\}$ を a 周りの半円とする。また $f(z)$ は a を 1 位の極とするから $a_{-1} := \mathrm{Res}_{z=a} f(z)$, $g(z) := f(z) - a_{-1}(z - a)^{-1}$ とすれば $g(z)$ は a の近傍で正則である。

(1) $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C(\varepsilon)} g(z)\, dz = 0$ を示せ。　(2) $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C(\varepsilon)} f(z)\, dz = \pi i a_{-1}$ を示せ。

上記の問題を使うと例えば次のような積分が計算出来る。

問題 14. 任意の実数 λ に対して次の積分を考える。

$$I(\lambda) := \int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{\sinh x}\, dx.$$

また $0 < \varepsilon < 1$, $R > 0$ に対して $C_1(\varepsilon)$ を原点中心の半径 ε の円周の上半分で $-\varepsilon$ から ε に向かう曲線、$C_2(\varepsilon)$ を $i\pi$ 中心の半径 ε の円周の下半分で $\varepsilon + i\pi$ から $-\varepsilon + i\pi$ に向かう曲線、$C_1 := [R, R + i\pi]$, $C_2 := [R + i\pi, \varepsilon + i\pi]$, $C_3 := [-\varepsilon + i\pi, -R + i\pi]$, $C_4 := [-R + i\pi, -R]$, $C_5 := [-R, -\varepsilon]$, $C_6 := [\varepsilon, R]$ とする。そして C を C_1, C_2, $C_2(\varepsilon)$, C_3, C_4, C_5, $C_1(\varepsilon)$, C_6 の順につなげて出来る単純閉曲線とする。

(1) 積分 $I(\lambda)$ は絶対収束することを示せ。

(2) $f(z) := e^{i\lambda z} / \sinh z$ の極とその位数を求めよ。

(3) $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_1(\varepsilon)} f(z)\, dz$ と $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_2} f(z)\, dz$ を求めよ。

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

(4) $\int_C f(z)\,dz$ に Cauchy の積分定理を用いて $I(\lambda) = \frac{\pi}{2}\tanh(\pi\lambda/2)$ を示せ。

問題 15. 次の定積分が収束することを示し, その値を求めよ.

$$(1)\ \int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{1+x^2}\,dx. \quad (2)\ \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)(1+x^2)}\,dx. \quad (3)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ixy}}{1+ix}\,dx \quad (y \neq 0).$$

(ヒント：以下のように複素線積分と留数定理を用いると良い。
(1) 問題 5 の単純閉曲線で $f(z) = \frac{(\log z)^2}{1+z^2}$ を線積分する。
(2) 問題 11(3) の単純閉曲線上 $f(z) := \frac{(\log z)^2}{(1+z)(1+z^2)}$ を線積分する。
(3) $y > 0$ のときは、$R > 0$ を十分大とし、$[1-iR, 1+iR]$ と $1+iR$ から 1 を中心とする半径 R の円の左半分に沿って $1-iR$ に戻る単純閉曲線上で $f(z) := e^{yz}/z$ を線積分する。)

補足問題： 広義固有空間分解と複素関数論

行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対してその相異なる固有値全体の集合を $\sigma(A)$ と書こう。任意の固有値 $\lambda \in \sigma(A)$ に対して $n(\lambda)$ をその重複度とする。このとき広義固有空間分解とは直和分解

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} \ker(A - \lambda E)^{n(\lambda)}$$

であった。この事実を複素関数論、特に留数を用いて証明しよう。固有値でない複素数 $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ に対して $zE - A$ は逆行列を持つ。そこで次のように行列 $R(z)$ を定める。

$$R(z) \ := \ (zE - A)^{-1}, \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)).$$

問題 16. 任意の $z, w \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ に対して次を示せ：

$$R(z) - R(w) = (w - z)R(z)R(w) = (w - z)R(w)R(z).$$

問題 17. $R(z) = (r_{ij}(z))$ と成分表示すると $r_{ij}(z)$ は z の有理関数になることを示せ。また $r_{ij}(z)$ は $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ 上正則で任意の $\lambda \in \sigma(A)$ は $r_{ij}(z)$ の高々$n(\lambda)$ 位の極であることを示せ。

問題 17 と同様に $R(z) = (r_{ij}(z))$ とおき、各 $\lambda \in \sigma(A)$ に対して $r_{ij}(z)$ を λ の周りで Laurent 展開すると、λ が高々$n(\lambda)$ 次の極なので次のように書ける。

$$r_{ij}(z) = \sum_{p=-n(\lambda)}^{\infty} a_{ij}(p;\lambda)(z-\lambda)^p, \quad a_{ij}(p;\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-\lambda|=\varepsilon} (\zeta-\lambda)^{-p-1} r_{ij}(\zeta)\,d\zeta. \tag{1}$$

但し $\varepsilon > 0$ は $|\zeta - \lambda| < \varepsilon$ が λ 以外の固有値を含まないように小さく取っている。そこで任意の固有値 $\lambda \in \sigma(A)$ と任意の整数 $p \in \mathbb{Z}$ に対して

$$X_p(\lambda) \ := \ (a_{ij}(p;\lambda)) \ \in M_n(\mathbb{C})$$

とおく。式 (1) よりこれは次のようにも書ける。

$$R(z) = \sum_{p=-n(\lambda)}^{\infty} (z-\lambda)^p X_p(\lambda), \quad X_p(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-\lambda|=\varepsilon} (\zeta-\lambda)^{-p-1} R(\zeta)\,d\zeta. \tag{2}$$

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

上記の「行列に値を取る関数 $R(\zeta)$ の線積分」は「成分ごとに積分してそれを成分とする行列」のことである。また通常の Laurent 展開定理と極の定義から次が従う：任意の $p \geq n(\lambda)+1$ に対して

$$X_{-p}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-\lambda|=\varepsilon} (\zeta-\lambda)^{p-1} R(\zeta)\, d\zeta \;=\; \mathbf{0}.$$

但し $\mathbf{0}$ は零行列である。

問題 18. 任意の $p \in \mathbb{Z}$ に対して ϵ_p を次で定める。

$$\epsilon_p := \begin{cases} 1 & p \geq 0 \text{ のとき} \\ 0 & p \leq -1 \text{ のとき} \end{cases}$$

このとき任意の固有値 $\lambda \in \sigma(A)$ と $p, q \in \mathbb{Z}$ に対して次が成り立つことを示せ：

$$X_p(\lambda) X_q(\lambda) \;=\; (1-\epsilon_p-\epsilon_q) X_{p+q+1}(\lambda).$$

任意の固有値 $\lambda \in \sigma(A)$ に対して行列 $P(\lambda), N(\lambda), S(\lambda) \in M_n(\mathbb{C})$ を次で定義する：

$$P(\lambda) := X_{-1}(\lambda), \quad N(\lambda) := X_{-2}(\lambda), \quad S(\lambda) := X_0(\lambda).$$

$P(\lambda)$ は (行列値) 正則関数 $R(z)$ の $z=\lambda$ での留数に他ならない。

$$P(\lambda) = \operatorname*{Res}_{z=\lambda} R(z), \quad \lambda \in \sigma(A).$$

問題 19. 以下が成り立つことを示せ:

(1) $P(\lambda)^2 = P(\lambda)$.
(2) $P(\lambda)N(\lambda) = N(\lambda)P(\lambda) = N(\lambda)$.
(3) $P(\lambda)S(\lambda) = S(\lambda)P(\lambda) = \mathbf{0}$.
(4) $N(\lambda)S(\lambda) = S(\lambda)N(\lambda) = \mathbf{0}$.
(5) $X_p(\lambda) = (-1)^p S(\lambda)^{p+1} \quad (p \geq 0)$.
(6) $X_{-p}(\lambda) = N(\lambda)^{p-1} \quad (p \geq 2)$.
(7) $N(\lambda)^{n(\lambda)} = \mathbf{0}$.

つまり $R(z)$ の $z=\lambda$ での Laurent 展開の各係数 (行列) $X_n(\lambda)$ は $P(\lambda), N(\lambda), S(\lambda)$ で全て決まる。また $N(\lambda)$ はベキ零行列、$P(\lambda)$ はベキ等行列である。

問題 20. 任意の $\lambda \neq \mu \in \sigma(A)$ と任意の負の整数 p, q に対して $X_p(\lambda)X_q(\mu) = \mathbf{0}$ を示せ。

従って、例えば次が成り立つ。

$$P(\lambda)P(\mu) = N(\lambda)N(\mu) = N(\lambda)P(\mu) = \mathbf{0}.$$

問題 21. 任意の $\lambda \in \sigma(A)$ と任意の $p \in \mathbb{Z}$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$(A-\lambda E)X_p(\lambda) = X_p(\lambda)(A-\lambda E) = X_{p-1}(\lambda) - \delta_{p,0}E,$$

ただし $\delta_{p,0}$ は $p=0$ のとき 1, その他は 0 を表す。

これから例えば $p = 0, -1$ とすると次の等式が分かる。

$$(A-\lambda E)S(\lambda) = P(\lambda) - E, \quad (A-\lambda E)P(\lambda) = N(\lambda).$$

次の問題にある性質がこの節の議論で本質的な役割を果たす。

担当教員: 柳田 伸太郎　研究室: A441　　E-mail:yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

問題 22. 次の等式を示せ：

$$E = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} P(\lambda).$$

(ヒント：$P(\lambda)$ の積分表示式 (2) と Cauchy の積分定理から $\sum_{\lambda\in\sigma(A)} P(\lambda) = \int_{|\zeta|=R} R(\zeta)\,d\zeta$. 但し $R > 0$ は任意の $\lambda \in \sigma(A)$ に対して $|\lambda| < R$ となるように十分大きく取る。以下の補題を使うと $|\zeta|$ が十分大きな場合に等式 $R(\zeta) = \sum_{p=0}^{\infty} \zeta^{-p-1} A^p$ が成立することが分かる。これから結論が得られる。)

補題 1. n 次正方行列全体の空間 $M_n(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}^{n^2}$ と同一視し、適当なノルムから定まる距離空間と考える。このとき任意の $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対してある定数 $C_A > 0$ が存在し、$|\zeta| > C_A$ ならば級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{-n-1} A^n$ は $M_n(\mathbb{C})$ で $|\zeta| > C_A$ に対して局所一様に収束し、$R(\zeta) = (\zeta E - A)^{-1}$ に等しい。

問題 19、問題 20 とその下の注意、問題 22、そしてプリント Y106 の問題 13 より次の分解を得ることが出来る。

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} \mathrm{Im}(P(\lambda)).$$

実はこの段階で既にジョルダン標準形定理を (ベキ零行列の標準形を認めれば) 得ることができるが、ここでは次の形の主張を問題としよう。

問題 23. 次の表示が成り立つことを示せ。

$$A = \sum_{\lambda} A(\lambda), \quad A(\lambda) = \lambda P(\lambda) + N(\lambda).$$

また $A(\lambda)A(\mu) = \mathbf{0}$ が $\lambda \neq \mu$ に対して成り立つことを示せ。更に

$$S := \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P(\lambda), \quad N := \sum_{\lambda \in \sigma(A)} N(\lambda)$$

とおくとき、S は対角化可能かつ N はベキ零行列であることを示せ。

最後に上記の分解が実際に広義固有空間分解に一致していることを示しておこう。

問題 24. 任意の固有値 $\lambda \in \sigma(A)$ に対して $\mathrm{Im}(P(\lambda)) = \ker(A - \lambda E)^{n(\lambda)}$ を示せ。(ヒント: $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ とし N をベキ零行列とすると $\ker(aE + N) = \{0\}$, つまり $aE + N$ は正則行列となることを用いるとよい。)